6

LES APPLICATIONS

THÉORIE

1. RAPPEL DE 7e: LES APPLICATIONS

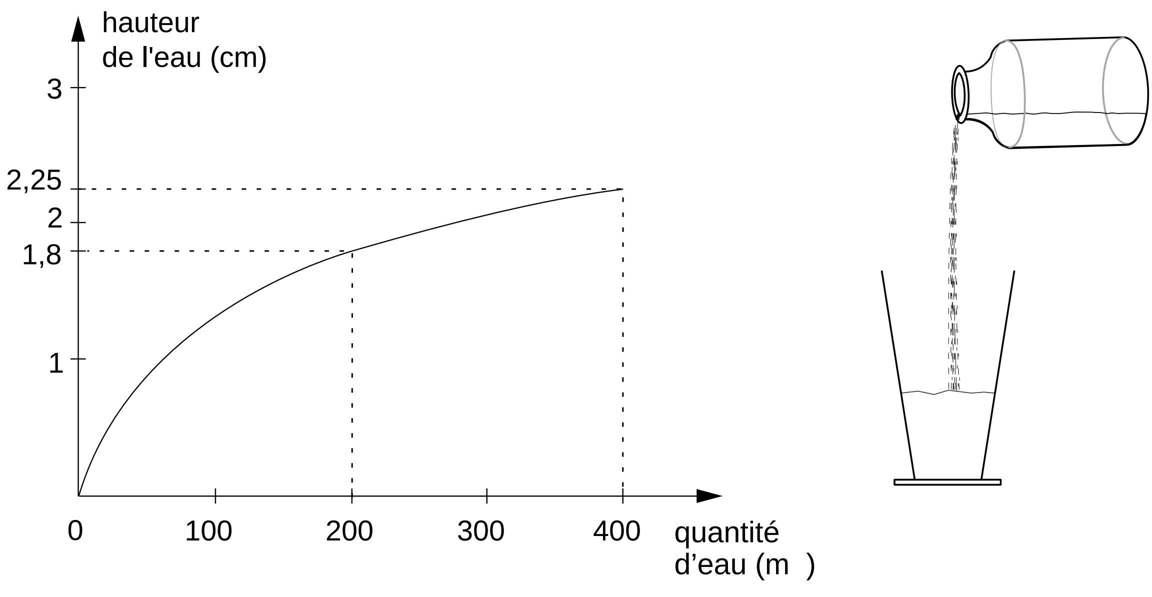
Une **relation** entre deux ensembles associe à certains éléments du premier ensemble (qu'on appelle **l'ensemble de départ**) un ou plusieurs éléments du second (qu'on appelle **l'ensemble d'arrivée**).

Une **application** est une relation d'un type particulier. C'est une relation qui associe à **chaque** élément de l'ensemble de départ **exactement un** élément (appelé son **image**) de l'ensemble d'arrivée. Voici trois exemples d'applications.

Exemple 1

Une éprouvette peut contenir 400 m . On verse de l'eau dans cette éprouvette, et on lit la hauteur (en cm) atteinte par l'eau dans l'éprouvette.

Sur un graphique, on a mis en rapport la quantité d'eau versée dans l'éprouvette et la hauteur qui lui correspond. Voici ce graphique:



On dit que ce graphique représente la hauteur d'eau dans l'éprouvette **en fonction** de la quantité d'eau qu'elle contient (la hauteur est mesurée en cm, et la quantité d'eau en m).

Puisque l'éprouvette peut contenir au plus 400 m , le graphique ne donne aucune indication de hauteur pour les quantités d'eau supérieures à 400 m .

On voit qu'à chaque quantité d'eau (entre 0 et 400 m) correspond une et une seule hauteur d'eau dans l'éprouvette. Ce graphique représente donc une application.

Dans cet exemple, l'ensemble de départ est l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 400. L'ensemble d'arrivée comprend tous les nombres entre 0 et 2,25.

La hauteur d'eau qui correspond à 400 m est 2,25 cm.
La hauteur d'eau qui correspond à 200 m est 1,8 cm.

Remarques

1) Par convention, lorsqu'on construit le graphique, l'ensemble de départ est placé horizontalement, et l'ensemble d'arrivée est placé verticalement.

2) Ce graphique représente bien une application, car chaque élément de l'ensemble de départ a exactement une image.

3) On dit que 1,8 est l'image de 200 (ou que 200 a pour image 1,8) et que 2,25 est l'image de 400 (ou que 400 a pour image 2,25).

4) Le point <200 ; 1,8> appartient au graphique de l'application, car pour une quantité d'eau de 200 m , on atteint une hauteur de 1,8 cm.

2. COMMENT DÉFINIR UNE APPLICATION

On définit une application en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée, et en donnant une règle qui permet de calculer l'image de chaque élément de l'ensemble de départ.

On désigne souvent une application par une lettre minuscule: f, g, h, ...

Si f est une application, et si A est son ensemble de départ et B son ensemble d'arrivée, on dit que "f est une application de A dans B".

Si l'ensemble d'arrivée B est le même que l'ensemble de départ A, on dit que "f est une application définie dans A".

Dans les exemples que nous étudierons, les ensembles de départ ou d'arrivée seront souvent l'un ou l'autre des ensembles suivants:

$\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres (positifs, négatifs, zéro) qu'on peut écrire en base 10 (écriture finie, ou illimitée)

$\mathbb{R}_+$, l'ensemble formé de 0 et des nombres positifs appartenant à $\mathbb{R}$.

L'ensemble de tous les nombres compris entre deux nombres donnés s'appelle un **intervalle**.

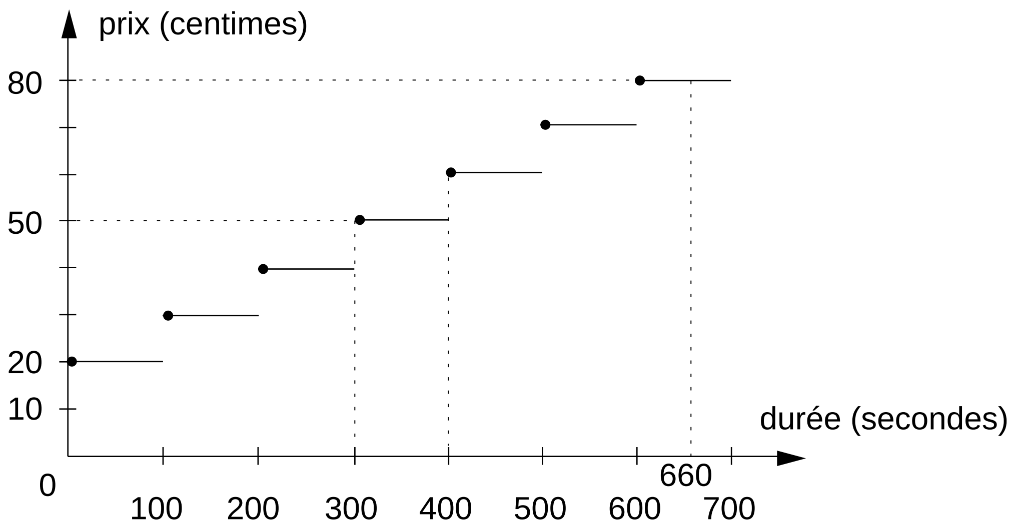
Dans l'exemple de l'éprouvette, l'ensemble de départ est l'intervalle formé de tous les nombres x tels que $0 \leq x \leq 400$. L'ensemble d'arrivée est l'intervalle formé de tous les nombres x tels que $0 \leq x \leq 2,25$.

Exemple 2

Pour calculer le prix d'une communication téléphonique dans le réseau local, au tarif normal, la règle est la suivante:

On paye une taxe de base de 10 centimes, puis on paye 10 centimes pour chaque période de 100 secondes, entière ou entamée.

Voici un graphique qui représente le prix d'une communication téléphonique en fonction de sa durée:



On voit sur ce graphique qu'une communication de 660 secondes (c'est-à-dire de 11 minutes) coûte 80 centimes. Et on voit que pour 50 centimes on peut téléphoner entre 300 et 400 secondes (mais pour 400 secondes, il faut payer 60 centimes).

Il s'agit bien d'une application, car à chaque durée correspond un et un seul prix.

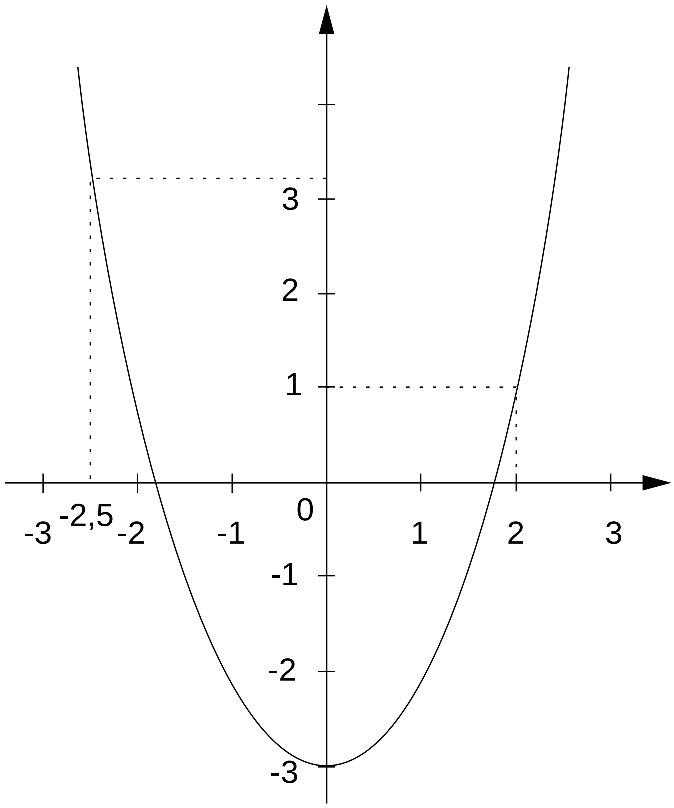
Exemple 3

Une application f est définie dans l'ensemble $\mathbb{R}$ par la règle suivante:

Règle. Pour trouver l'image d'un nombre par f on élève le nombre au carré puis on soustrait 3 de ce carré.

L'image de 0 est $0^2 - 3 = -3$	on écrit $f(0) = -3$
L'image de 2 est $2^2 - 3 = 1$	on écrit $f(2) = 1$
L'image de $-2{,}5$ est $(-2{,}5)^2 - 3 = 3{,}25$	on écrit $f(-2{,}5) = 3{,}25$

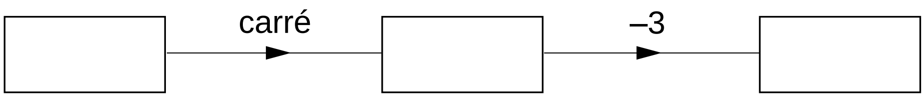
Voici la représentation graphique de l'application f:



Remarque 1

Pour certaines applications, on peut donner une “écriture mathématique” (une “formule”) pour exprimer la règle qui permet de calculer l'image d'un nombre.

La règle qui correspond à l'exemple 3 peut être représentée par la chaîne suivante:



Cette règle est valable pour n'importe quel nombre réel.

Soit x un nombre réel; on obtient:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\text{carré}} \boxed{x^2} \xrightarrow{-3} \boxed{x^2 - 3}$$

En passant directement du premier au dernier maillon, ceci devient:

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{x^2 - 3}$$

> L'écriture algébrique de l'application f est
>
> $$f : x \qquad x^2 - 3$$
>
> On peut aussi l'écrire sous la forme:
>
> $$f(x) = x^2 - 3$$

Exemples

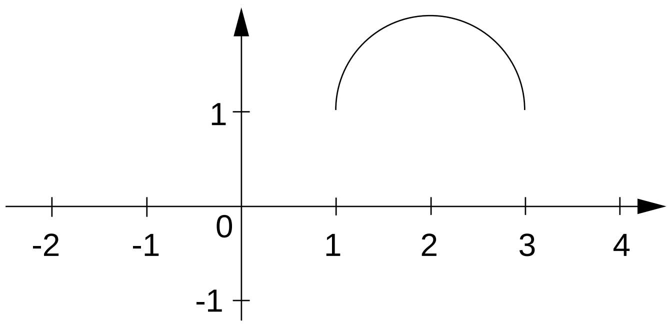
$f : 2 \qquad 2^2 - 3 = 1$	l'image de 2 par f est 1 on écrit $f(2) = 1$
$f : -0{,}5 \qquad (-0{,}5)^2 - 3 = -2{,}75$	l'image de $-0{,}5$ par f est $-2{,}75$ on écrit $f(-0{,}5) = -2{,}75$
$f : -4 \qquad (-4)^2 - 3 = 13$	l'image de -4 par f est 13 on écrit $f(-4) = 13$

Remarque 2

Dans l'exemple 1 (l'éprouvette), l'ensemble de départ n'est pas tout l'ensemble $\mathbb{R}$.
Voici un autre exemple de ce genre.

Exemple 4

Une fonction g est représentée par le graphique suivant:



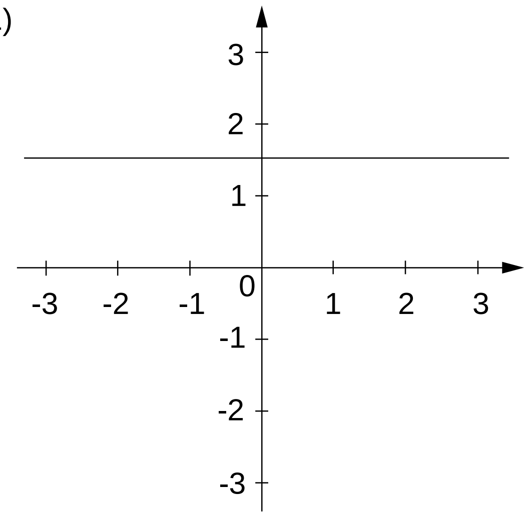
Ce graphique est un demi-cercle.

L'ensemble de départ est l'intervalle formé de tous les nombres x tels que
$1 \leq x \leq 3$.

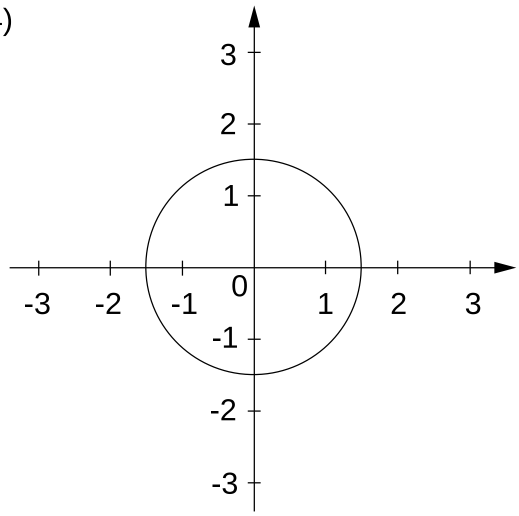
EXERCICES ORAUX

666 Voici quelques figures. Dire chaque fois s'il s'agit du graphique d'une application.

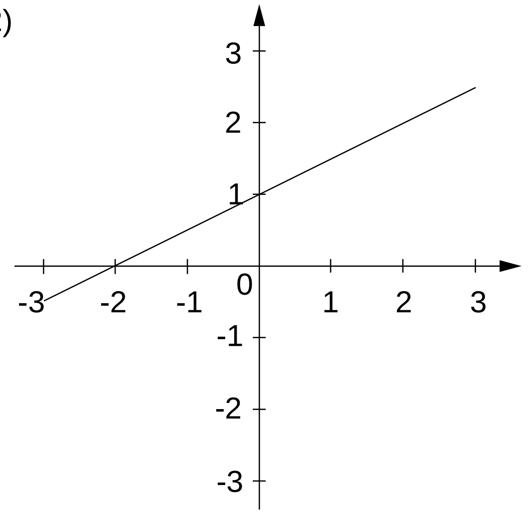
1)



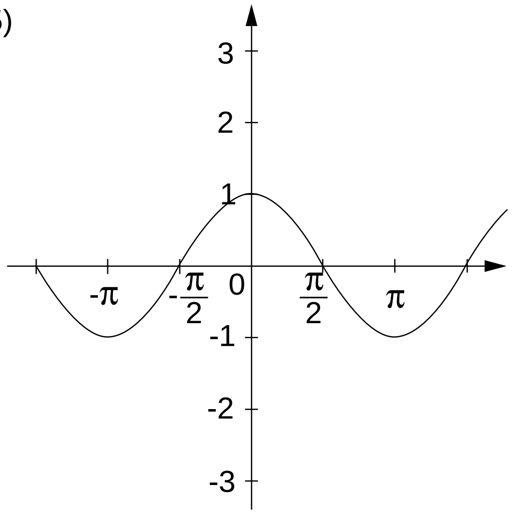
4)



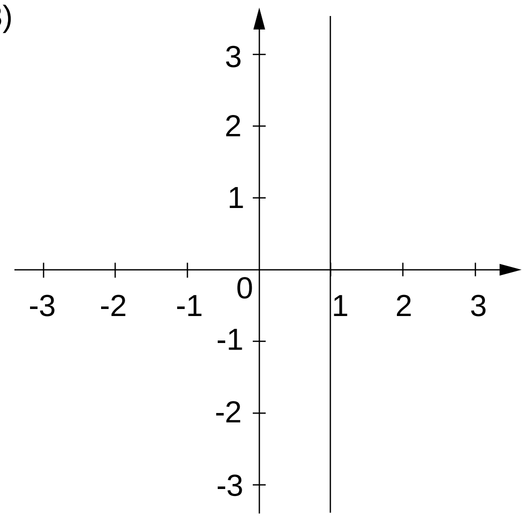
2)



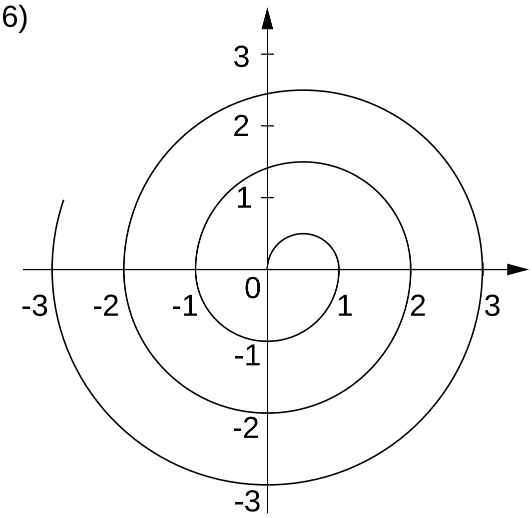
5)



3)

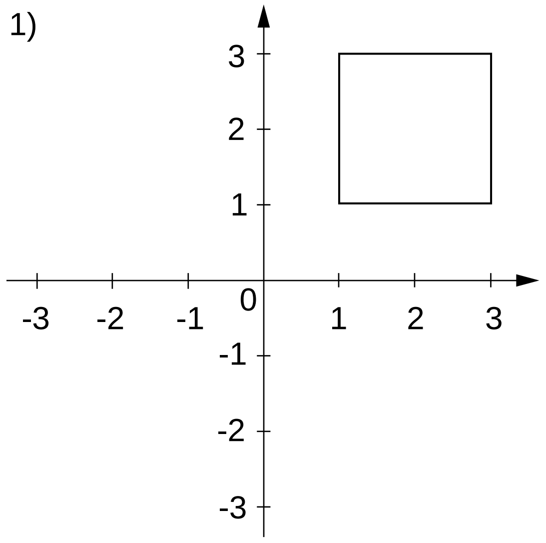


6)

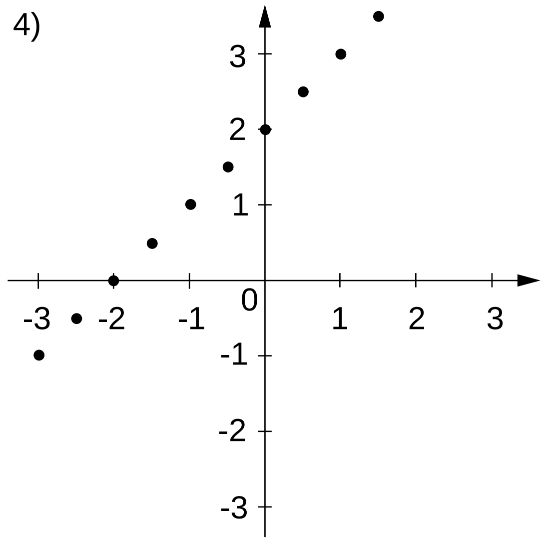


667 Voici quelques figures. Dire chaque fois s'il s'agit du graphique d'une application.

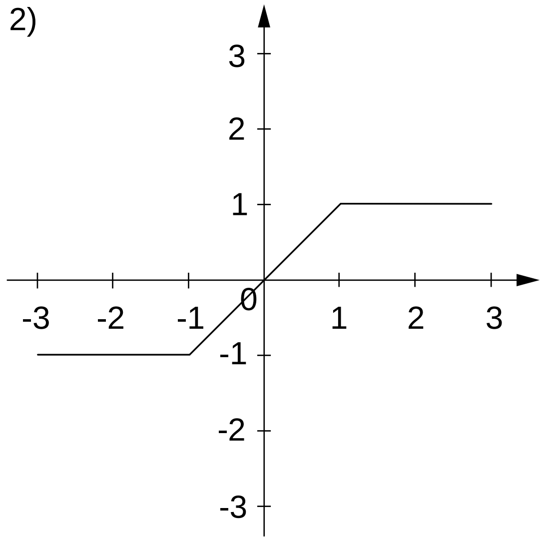
1)



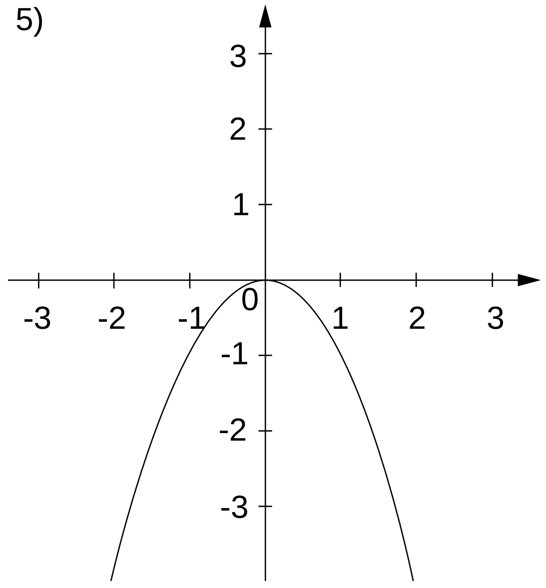
4)



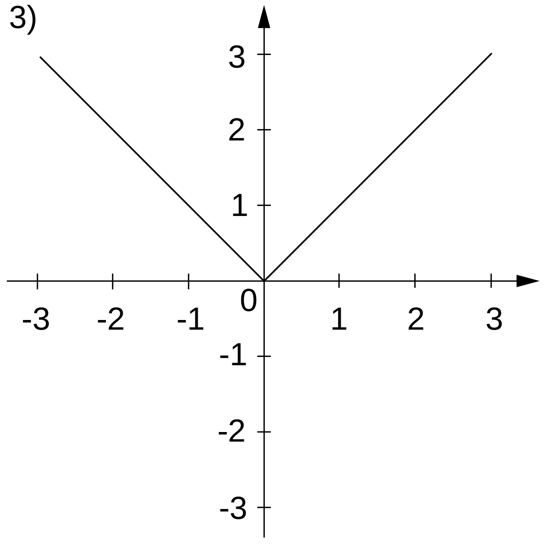
2)



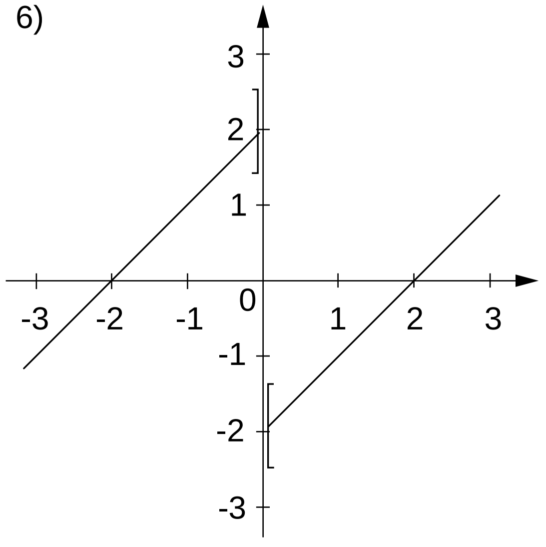
5)



3)

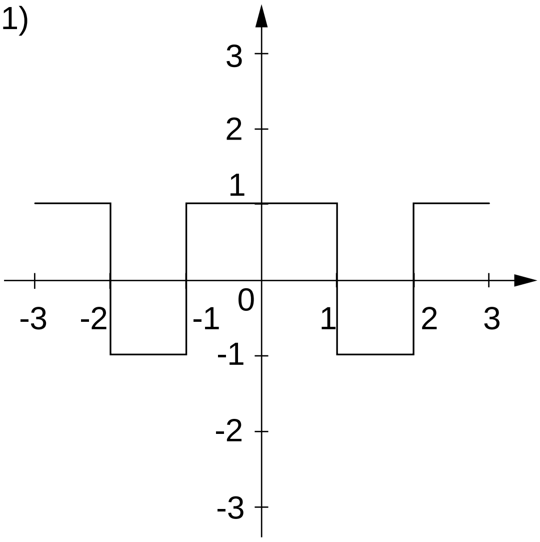


6)

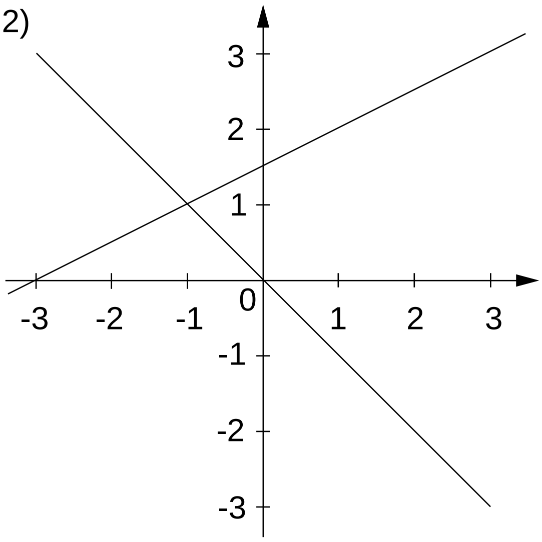


668 Voici quelques figures. Dire chaque fois s'il s'agit du graphique d'une application.

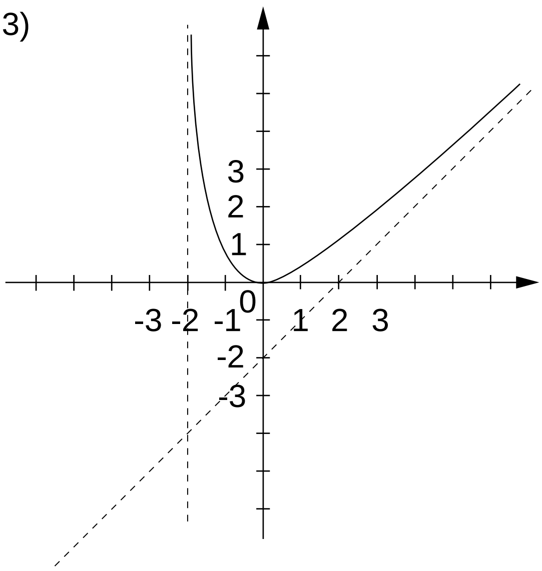
1)



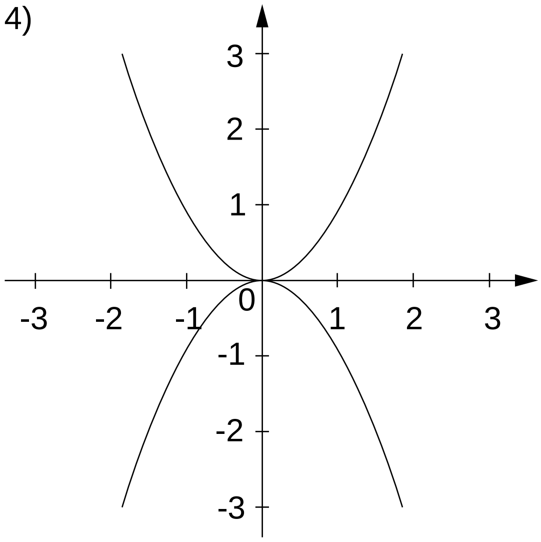
2)



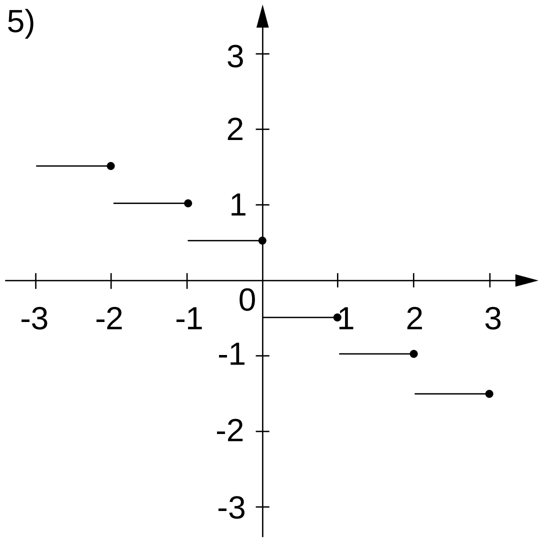
3)



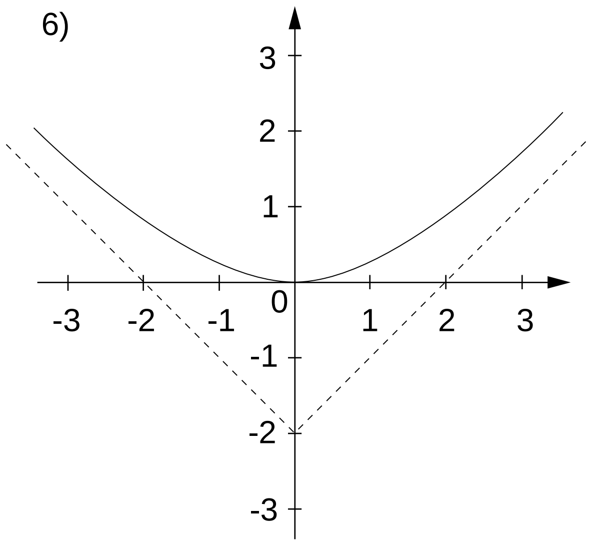
4)



5)

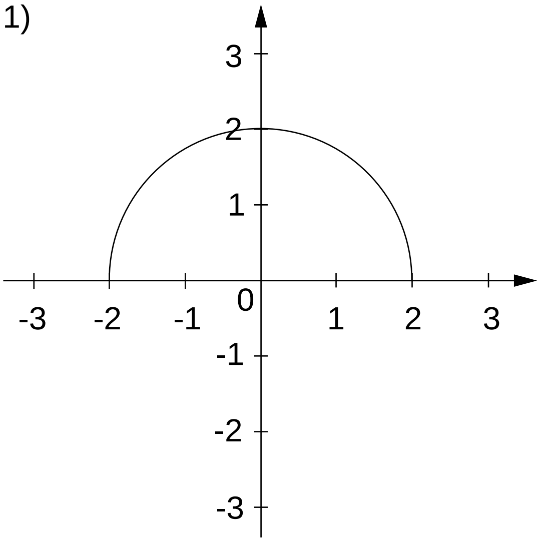


6)

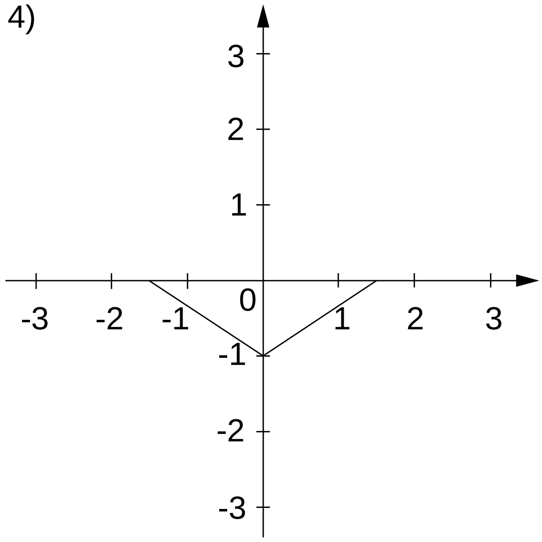


669 Quel doit être dans chaque cas l'ensemble de départ pour que les graphiques ci-dessous représentent des applications ?

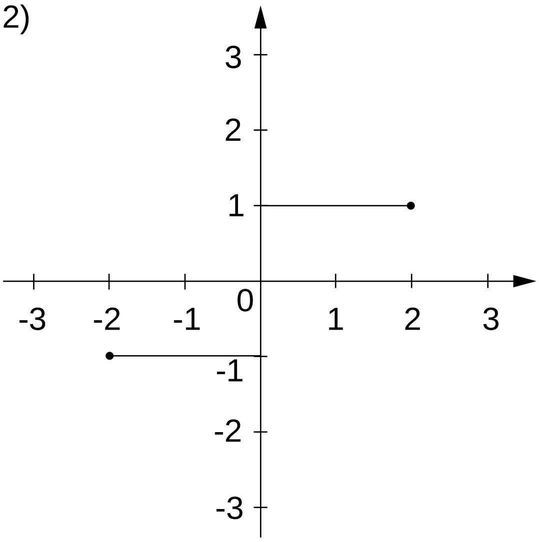
1)



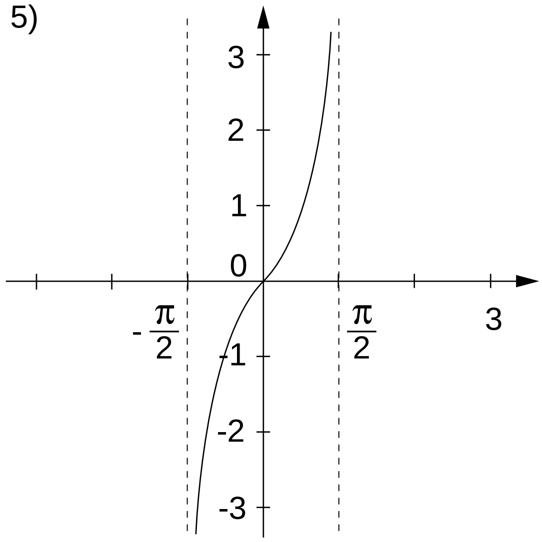
4)



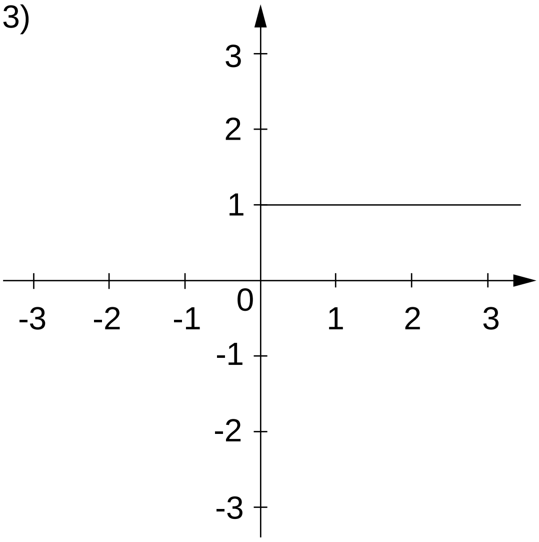
2)



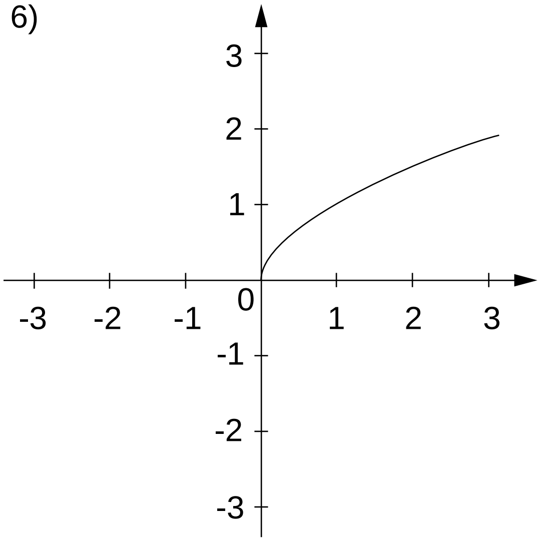
5)



3)

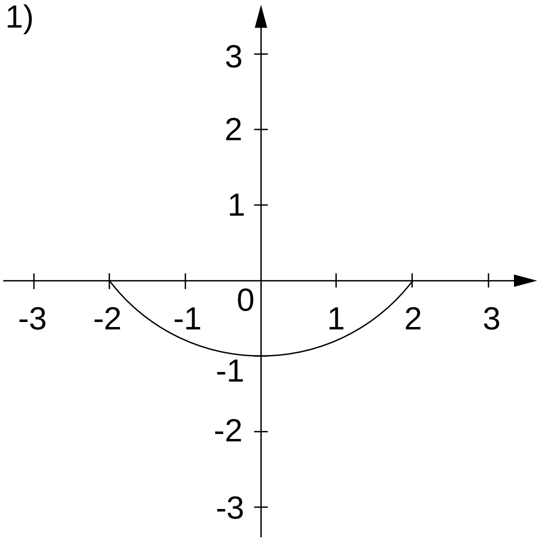


6)

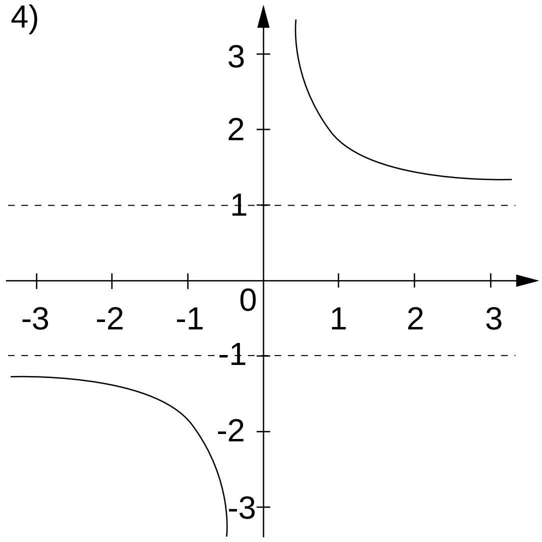


670 Quel doit être dans chaque cas l'ensemble de départ pour que les graphiques ci-dessous représentent des applications ?

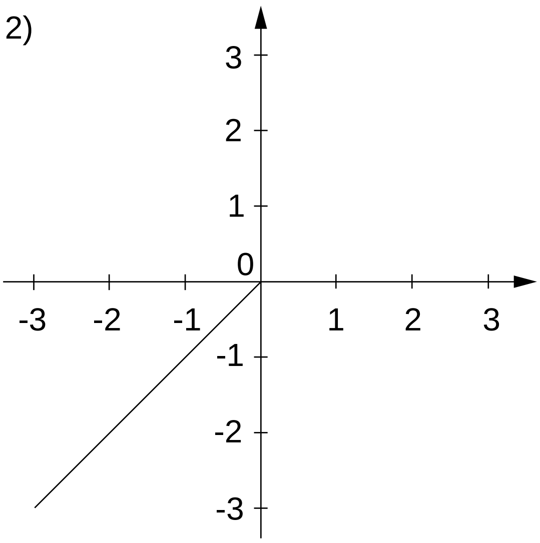
1)



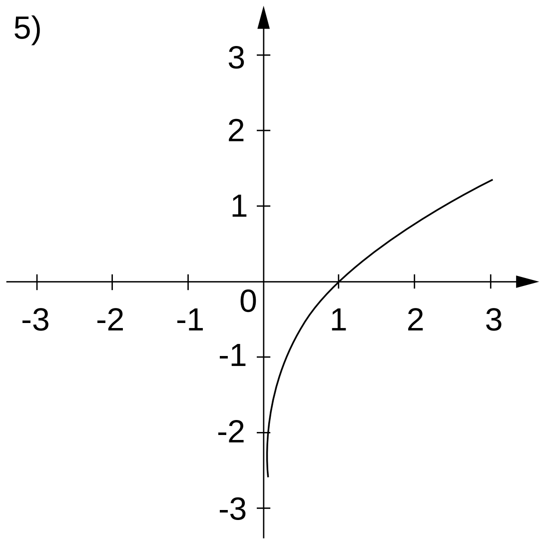
4)



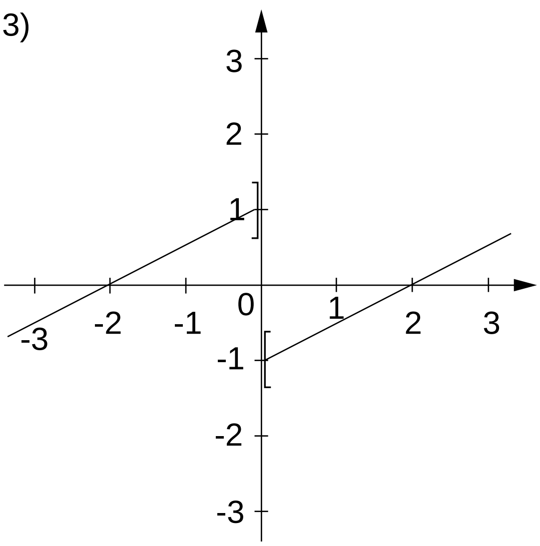
2)



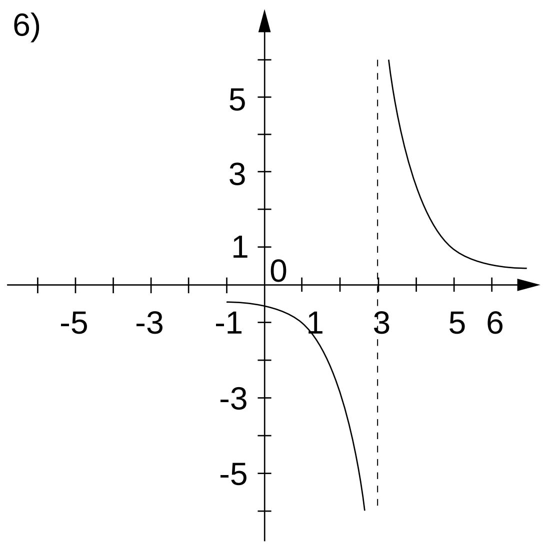
5)



3)



6)



671 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on donne l'application f par la règle suivante :

Règle: Pour trouver l'image d'un nombre par f, on multiplie ce nombre par 2 puis on soustrait 3.

Calculer l'image de chacun des nombres suivants :

1) 4 2) 2,5 3) 1 4) 0,5 5) –4 6) –2

672 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on donne l'application g par la règle suivante :

Règle: Pour trouver l'image d'un nombre par g, on élève ce nombre au carré puis on additionne 1.

Calculer l'image de chacun des nombres suivants :

1) 2 2) –3 3) 1 4) 0,5 5) –1,2 6) 0

673 Dans l'ensemble $\mathbb{R}_+$ on donne l'application h par la règle suivante :

Règle: Pour trouver l'image d'un nombre par h, on extrait sa racine carrée.

Calculer l'image de chacun des nombres suivants :

1) 100 2) 36 3) 81 4) 0,25 5) 1,21 6) 6,25

674 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on donne l'application k définie par l'expression algébrique :

$$k : x \qquad 3x + 1$$

Donner la règle qui permet de trouver l'image d'un nombre par k.

Calculer :

1) k(1) 2) k(7) 3) k(12) 4) k(1,1) 5) k(–5) 6) k(–40)

675 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on donne l'application définie par l'expression algébrique :

$$(x) = -x + 2$$

Donner la règle qui permet de trouver l'image d'un nombre par .

Calculer :

1) (4,5) 2) (–5) 3) (0,4) 4) (–0,1) 5) (14) 6) (–100)

676 Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on donne l'application m définie par l'expression algébrique :

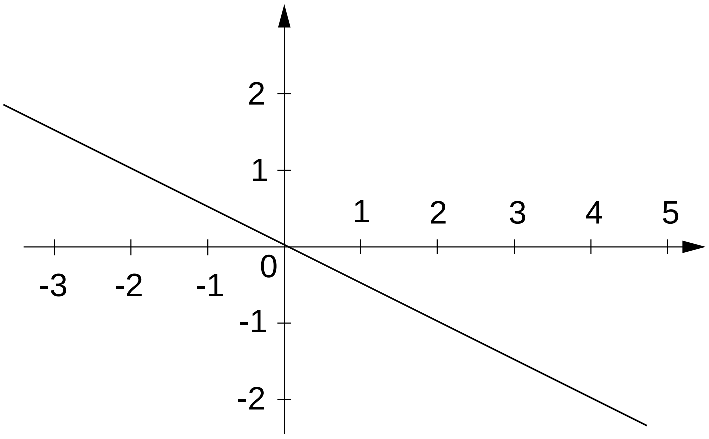
$$m : x \qquad 4x - 5$$

Donner la règle qui permet de trouver l'image d'un nombre par m.

Calculer :

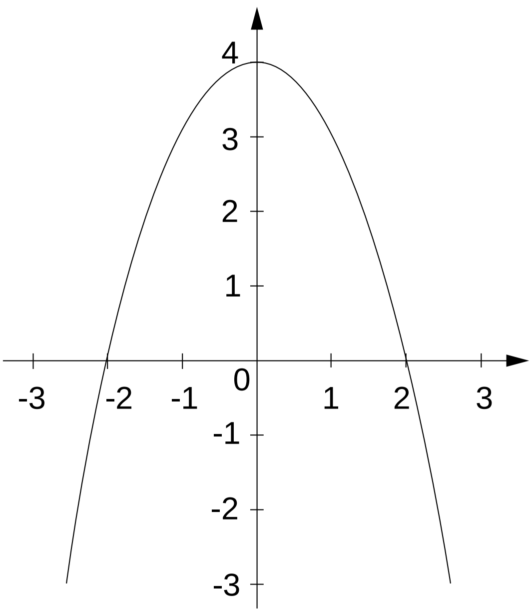
1) $m(120)$ 2) $m(12)$ 3) $m(-4)$ 4) $m(-15)$ 5) $m(2,5)$ 6) $m(16)$

677 Une application dans $\mathbb{R}$ est représentée par le graphique ci-dessous :



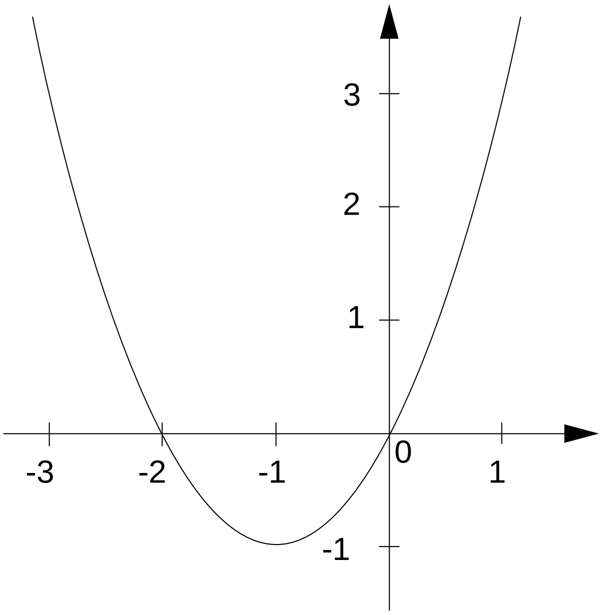
Quelle est l'image de -1 ? de 0 ? de $+4$?
Par cette application, de quel nombre -1 est-il l'image ? et 0 ?
Comment varie l'image lorsque le nombre augmente de 1 ?

678 Une application dans $\mathbb{R}$ est représentée par le graphique ci-dessous :



Quelle est l'image de 0 ? de -1 ? de $+1$?
De quel(s) nombre(s) 0 est-il l'image ?
Pour quel nombre l'image est-elle maximale ?
Comment varie l'image entre -2 et -1 ? et entre 1 et 2 ?

679 Une application dans $\mathbb{R}$ est représentée par le graphique ci-dessous :



Quelle est l'image de –2,5 ? de 0 ? de 1 ?

De quel(s) nombre(s) –0,75 est-il l'image ?

Pour quel nombre l'image est-elle minimale ?

Comment varie l'image entre –2 et –1 ? et entre –1 et 0 ?

EXERCICES ÉCRITS

680 Placer les points suivants sur un graphique :

A <0 ; 0>	**H** <–3 ; –3>	**O** <5 ; –3>	**V** <–10 ; –1>
B <–1 ; –1>	**I** <–5 ; 1>	**P** <8 ; –4>	**W** <–8 ; –2>
C <–2 ; 1>	**J** <–2 ; 4>	**Q** <10 ; –5>	**X** <–3 ; –3>
D <0 ; 3>	**K** <1 ; 4>	**R** <5 ; –5>	**Y** <–13 ; 0>
E <3 ; 1>	**L** <4 ; 2>	**S** <–9 ; –5>	**Z** <–9 ; 2>
F <2 ; –2>	**M** <3 ; –2>	**T** <–10 ; –4>	
G <1 ; –3>	**N** <1 ; –3>	**U** <–11 ; –3>	

Relier les points par ordre alphabétique de **a** à **x**.
Relier **U** à **Y** et **V** à **Z**.

681 Écrire l'expression algébrique des applications dans $\mathbb{R}$ symbolisées par :

1) g : $\square \xrightarrow{\cdot 4} \square \xrightarrow{+ 1} \square$

2) h : $\square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{- 1} \square$

3) i : $\square \xrightarrow{\text{carré}} \square \xrightarrow{+ 2} \square$

4) j : $\square \xrightarrow{\cdot 3} \square \xrightarrow{- 3} \square$

682 Écrire l'expression algébrique des applications dans $\mathbb{R}$ symbolisées par :

1) k : $\square \xrightarrow{\text{carré}} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square$

2) : $\square \xrightarrow{\cdot 5} \square \xrightarrow{- 3} \square$

3) m : $\square \xrightarrow{\cdot 2} \square \xrightarrow{\text{carré}} \square$

4) n : $\square \xrightarrow{- 1} \square \xrightarrow{\cdot 2} \square$

683 Écrire l'expression algébrique des applications dans $\mathbb{R}$ symbolisées par :

1) o : $\square \xrightarrow{\text{carré}} \square \xrightarrow{-1} \square$

2) p : $\square \xrightarrow{\cdot 10} \square \xrightarrow{+4} \square$

3) q : $\square \xrightarrow{\text{opposé}} \square \xrightarrow{-5} \square$

4) r : $\square \xrightarrow{\cdot(-2)} \square \xrightarrow{+4} \square$

684 f, g et h sont des applications dans $\mathbb{R}$.

Règles: Pour trouver l'image d'un nombre par f, il faut le multiplier par 4 puis soustraire 5.
Pour trouver l'image d'un nombre par g, il faut le multiplier par 2 puis élever au carré.
Pour trouver l'image d'un nombre par h, il faut lui ajouter 5 puis multiplier par 3.

1) Donner l'expression algébrique de f, g et h.
2) Calculer f(25), g(–4), g(0), h(7), h(–0,5).

685 i, j et k sont des applications dans $\mathbb{R}$.

Règles: Pour trouver l'image d'un nombre par i, il faut en prendre la valeur absolue.
Pour trouver l'image d'un nombre par j, il faut en prendre la valeur absolue puis ajouter 3.
Pour trouver l'image d'un nombre par k, il faut lui ajouter 3 puis prendre la valeur absolue de cette somme.

1) Donner l'expression algébrique de i, j et k.
2) Calculer i(4), i(–2), j(2), j(–7), k(2), k(–7).

686 , m et n sont des applications dans $\mathbb{R}$.

Règles: Pour trouver l'image d'un nombre par , il faut en prendre l'opposé.
Pour trouver l'image d'un nombre par m, il faut en prendre l'opposé puis ajouter 2.
Pour trouver l'image d'un nombre par n, il faut lui ajouter 2 puis prendre l'opposé de cette somme.

1) Donner l'expression algébrique de , m et n.
2) Calculer (–5), m(–10), m(4), n(–10), n(4).

687 f est une application dans IR définie par

$$f : x \qquad 3x$$

1) Calculer f(0), f(–2), f(2), f(–4), f(4).
2) Représenter l'application f par un graphique.

688 g est une application dans IR définie par

$$g(x) = -x$$

Représenter l'application g par un graphique.

689 h est une application dans IR définie par

$$h : x \qquad -2x$$

1) Calculer h(0), h(1), h(–1), h(2), h(–2).
2) Représenter l'application h par un graphique.

690 k est une application dans IR définie par

$$k(x) = 5$$

1) Calculer k(0), k(–4), k(1250).
2) Représenter l'application k par un graphique.

691 est une application dans IR définie par

$$: x \qquad -1$$

Représenter l'application par un graphique.

692 f est une application dans IR définie par

$$f(x) = 2x + 1$$

1) Calculer f(0), f(–1), f(1), f(–3), f(3).
2) Représenter l'application f par un graphique.

693 g est une application dans IR définie par

$$g : x \qquad 3x - 4$$

1) Calculer g(0), g(–1), g(1), g(–2), g(2).
2) Représenter l'application g par un graphique.

694 h est une application dans IR définie par

$$h(x) = -2x + 2$$

1) Calculer h(0), h(–1), h(1), h(–2), h(2) .
2) Représenter l'application h par un graphique.

695 j est une application dans IR définie par

$$j : x \qquad -3x - 1$$

1) Calculer j(0), j(–1), j(1), j(–2), j(2) .
2) Représenter l'application j par un graphique.

696 f, g et h sont des applications dans IR définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x + 3 \\ g(x) &= 2x - 3 \\ h(x) &= -(2x + 3) \end{aligned}$$

1) Recopier le tableau ci-dessous et le compléter

x	f(x)	g(x)	h(x)
–3			
–1			
0			
+1			
+3			

2) Représenter graphiquement f, g et h en utilisant le même système d’axes (f en rouge, g en bleu, h en vert).

697 , m et n sont des applications dans IR définies par

$$\begin{aligned} &: x \qquad |x| \\ m &: x \qquad |x + 4| \\ n &: x \qquad x + |x| \end{aligned}$$

1) Choisir 5 valeurs pour x et calculer (x), m(x) et n(x) pour ces valeurs (présentation sous forme de tableau).
2) Représenter graphiquement , m et n en utilisant le même système d’axes (en rouge, m en bleu, n en vert).

698 f, g, h et i sont des applications dans IR définies par les expressions algébriques :

$$f : x \qquad -2x+1$$

$$g : x \qquad 2x+1$$

$$h : x \qquad -2x-2$$

$$i : x \qquad 2x-2$$

1) Choisir 5 valeurs pour x et calculer f(x), g(x), h(x) et i(x) pour ces valeurs (présentation sous forme de tableau).
2) Représenter graphiquement f, g, h et i en utilisant le même système d’axes (f en rouge, g en bleu, h en vert, i en brun).
3) Dans le cahier, répondre aux questions suivantes :
   a) En quoi les expressions algébriques de f et de g sont-elles différentes ? Comment cette différence se traduit-elle sur leurs graphiques ?
   b) En quoi les expressions algébriques de h et de i sont-elles différentes ? Comment cette différence se traduit-elle sur leurs graphiques ?
   c) En quoi les expressions algébriques de f et de h se ressemblent-elles ? Comment se traduit cette ressemblance sur leurs graphiques ?
   d) En quoi les expressions algébriques de g et de i se ressemblent-elles ? Comment se traduit cette ressemblance sur leurs graphiques ?

699 et m sont des applications dans IR définies par les expressions algébriques :

$$(x) = 3x + 2$$

$$m(x) = 3x$$

1) Choisir 5 valeurs pour x et calculer (x) et m(x) pour ces valeurs.
2) Représenter graphiquement et m en utilisant le même système d’axes (en rouge, m en bleu).
3) Dans le cahier, répondre aux questions suivantes :
   a) En quoi les expressions algébriques de et de m se ressemblent-elles ? Comment se traduit cette ressemblance sur leurs graphiques ?
   b) En quoi les expressions algébriques de et de m sont-elles différentes ? Comment se traduit cette différence sur leurs graphiques ?
      Quelle est la particularité de l'application m ?
      Comment peut-on voir cette particularité dans l'expression algébrique de m ?

700 f est une application dans IR définie par l’expression algébrique suivante :

$$f(x) = x^2$$

1) Calculer f(0), f(–1), f(1), f(–2), f(2), f(–0,5), f(0,5), f(–3), f(3).
2) Donner la représentation graphique de f.

701 g est une application dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g : x \qquad x^2 - 3$$

1) Calculer $g(0)$, $g(-1)$, $g(1)$, $g(-2)$, $g(2)$, $g(-0{,}5)$, $g(0{,}5)$, $g(-3)$, $g(3)$.
2) Donner la représentation graphique de g.

702 k est une application dans $\mathbb{R}$ définie par

$$k(x) = 2x^2$$

1) Calculer $k(0)$, $k(-1)$, $k(1)$, $k(-2)$, $k(2)$, $k(-0{,}5)$, $k(0{,}5)$, $k(-3)$, $k(3)$.
2) Donner la représentation graphique de k.

703 m est une application dans $\mathbb{R}$ définie par

$$m(x) = -x^2$$

1) Calculer $m(0)$, $m(-1)$, $m(1)$, $m(-2)$, $m(2)$, $m(-3)$, $m(3)$, $m(-0{,}5)$, $m(0{,}5)$.
2) Donner la représentation graphique de m.

704 h est une application dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h : x \qquad -x^2 + 1$$

1) Calculer $h(0)$, $h(-1)$, $h(1)$, $h(-2)$, $h(2)$, $h(-3)$, $h(3)$, $h(-0{,}5)$, $h(0{,}5)$.
2) Représenter h graphiquement.

705 f, g et h sont des applications dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 3x \\ g(x) &= -x^2 + 2 \\ h(x) &= -5x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

Calculer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ pour $x = -4$, $x = -3$, $x = 2$ et $x = 0{,}5$.

EXERCICES DE DÉVELOPPEMENT

706 Une application f dans $\mathbb{R}$ a pour graphique une droite qui passe par les points **A** < –2 ; 1 > et **B** < 4 ; 4 >.

1) Dessiner le graphique de cette application.
2) Quelle est l'image de 0 par f ?
3) De combien augmente l'image lorsque le nombre de départ augmente de 1 ?
4) Donner l'expression algébrique de f.

707 Une application g dans $\mathbb{R}$ a pour graphique une droite qui passe par les points **C** < 1 ; –3 > et **D** < –1 ; 1 >.

1) Dessiner le graphique de g.
2) Quelle est l'image de 0 ?
3) Comment varie l'image lorsque le nombre de départ augmente de 1 ?
4) Donner l'expression algébrique de g.

708 L'expression algébrique d'une application f est: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1) Quel est l'ensemble de départ de f ?
2) Sur une feuille de papier millimétré, construire le graphique de f (utiliser une calculatrice).

709 Une application dans $\mathbb{R}$ a pour graphique une droite qui passe par les points < –2 ; 1 > et < 2 ; –3 > .

1) Dessiner le graphique de cette application.
2) Répondre dans le cahier aux questions suivantes :
   a) Quelle est l'image de 0 par cette application ? de –3 ? de 5 ?
   b) Quel est le nombre qui a –0,5 pour image ?
   c) Comment varie l'image lorsque le nombre de départ augmente de 1 ?
   d) Quelle est l'expression algébrique de cette application ?

710 Une application dans $\mathbb{R}$ a pour graphique une droite qui passe par les points < 0 ; 0 > et < 3 ; 2 >.

1) Dessiner le graphique de cette application.
2) Répondre dans le cahier aux questions suivantes :
   a) Quelle est l'image de –3 ? de 1,5 ? de –4,5 ?
   b) Quel est le nombre qui a –1 pour image ?
   c) Comment varie l'image lorsque le nombre de départ augmente de 1 ?
   d) Quelle est l'expression algébrique de cette application ?

711 i , j et k sont des applications dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = |-x-2|$$
$$j(x) = -|x-2|$$
$$k(x) = |x-2|$$

1) Choisir 5 valeurs pour x et calculer i(x), j(x) et k(x) pour ces valeurs (présentation sous forme de tableau).
2) Représenter graphiquement i, j et k en utilisant le même système d'axes. (i en rouge, j en bleu et k en vert).

712 Une application g dans $\mathbb{R}$ a l'expression algébrique $g(x) = |4x^2 - 9|$.

1) Recopier ce tableau et le compléter :

x	–2	$-\frac{3}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
g(x)									

2) Construire la représentation graphique de g.

713 Une application h a l'expression algébrique $h(x) = \dfrac{2x}{x-2}$

1) Quel est l'ensemble de départ de h ?
2) Recopier ce tableau et le compléter :

x	–2	0	1	3	4	6
h(x)						

3) Construire la représentation graphique de h.

714 f est une relation dans $\mathbb{Z}$ définie par la règle :
y est l'image de x si le produit de x et y est positif et différent de 0.

1) Faire le graphique de f.
2) Est-ce que f est une application ?

715 g est une relation dans $\mathbb{Z}$ définie par la règle :
y est l'image de x si la somme de x et y est positive et différente de 0.
1) Faire le graphique de g.
2) Est-ce que g est une application ?