LE CALCUL LITTÉRAL

AVERTISSEMENT

La plupart des exemples utilisés dans ce chapitre sortent du cadre défini par le plan d'études destiné aux élèves de niveau B de la section générale et aux élèves de niveau C des collèges à niveaux et à options. Aussi était-il difficile de mettre en évidence, comme dans les autres chapitres, les notions que doivent connaître, en calcul littéral, ces élèves-là.
Pour mémoire, voici un extrait du plan d'études concernant ce regroupement d'élèves.

2. Algèbre

2.1. Calcul algébrique (Polynômes à une variable et du premier degré; coefficients entiers)

2.1.1 Monômes et polynômes

- **Opérer dans l'ensemble des monômes: addition, multiplication d'un monôme par un entier.**
- **Opérer dans l'ensemble des polynômes: addition.**
- **Multiplier un polynôme par un nombre entier.**

THÉORIE

1. LE CALCUL LITTÉRAL: TROIS EXEMPLES

Nous avons vu en 7e qu'on utilise souvent des lettres pour représenter des nombres.

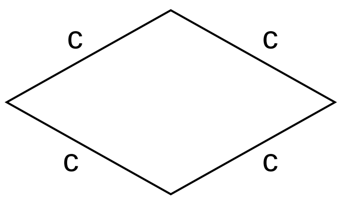
Nous avons résolu des problèmes comme ceux-ci:

Problème 1 La longueur du côté d'un losange est c.
Comment peut-on exprimer le périmètre de ce losange?

Solution Les 4 côtés d'un losange ont la même longueur.
Son périmètre se calcule en additionnant les longueurs de ses côtés; il est donc égal à

$c + c + c + c = 4 \cdot c$

(et on écrira: $4c$ au lieu de $4 \cdot c$).



Nous avons ainsi démontré la formule suivante:

Formule Le périmètre d'un losange est égal à $4c$,
si c est la longueur de son côté.

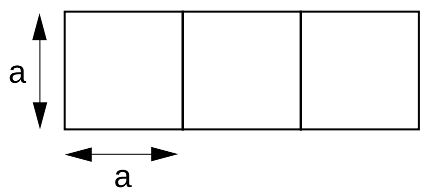
Avec cette formule nous pouvons éviter de répéter le même raisonnement chaque fois qu'il s'agit de calculer le périmètre d'un losange.

Par exemple, pour calculer le périmètre d'un losange dont le côté mesure 12 cm, on remplace c par 12 dans l'expression $4c$ que donne la formule. On voit alors que le périmètre de ce losange est égal à

$$4 \cdot (12 \text{ cm}) = 48 \text{ cm}$$

Comme on l'a appris en 7e on dit, dans cette situation, que c est une **variable**.

Problème 2 On forme un rectangle en assemblant 3 carrés identiques.
La longueur du côté de chaque carré est a.
Comment peut-on exprimer l'aire de ce rectangle?



Solution L'aire de chaque carré est égale à $a \cdot a$. L'aire du rectangle est égale à la somme des aires des 3 carrés; elle est donc égale à

$$a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a = 3 \cdot a \cdot a$$

(et on écrira: $3 \cdot a^2$, ou encore $3a^2$; pour abréger l'écriture, on utilise la notation "puissance" introduite au Chapitre 1).

Nous avons donc démontré la formule suivante:

Formule L'aire du rectangle formé en assemblant 3 carrés égaux est égale à $3a^2$, si a est la longueur du côté de chaque carré.

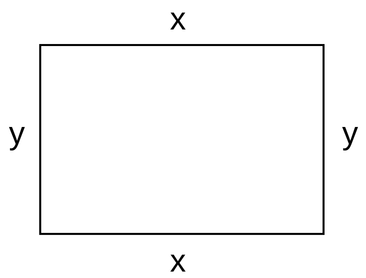
Certaines formules s'écrivent avec plusieurs variables.

Par exemple, le périmètre de ce rectangle est égal à

$$x + x + y + y$$

c'est-à-dire à

$$2x + 2y .$$



Pour trouver ces formules, nous avons calculé avec des lettres (c pour le losange; a pour le carré; x et y pour le rectangle), comme on calcule avec des nombres.

En calculant avec des lettres comme on le ferait avec des nombres, on fait du **calcul littéral**.

2. LES OPÉRATIONS DU CALCUL LITTÉRAL

2.1 LES MONÔMES

Une expression comme $9 \cdot x$ (qu'on peut aussi écrire: $9x$) est appelée un **monôme**.

Un monôme est formé d'un nombre (par exemple, 9) et d'une variable (par exemple, x).

Leur produit (dans cet exemple, c'est $9x$) est un monôme.

Dans le monôme $9x$ on dit que

le nombre **9** est le **coefficient**, et la lettre **x** est la **variable**.

Voici d'autres exemples de monômes:

$$3a^2 \quad ; \quad 9b \quad ; \quad 4c \quad ; \quad -2y^3 \quad ; \quad x$$

Remarque Comme dans le dernier exemple (le monôme x), on omet souvent d'écrire le coefficient s'il est égal à 1. En fait, x est le monôme $1 \cdot x$.

De même, $-x$ désigne le monôme $(-1) \cdot x$.

2.2 LE DEGRÉ D'UN MONÔME

On dit que:

– le degré du monôme $2x^3$ est 3
– le degré du monôme $7y$ est 1
– le degré du monôme $-6a^2$ est 2 .

Le **degré** d'un monôme est l'exposant de sa variable (au sujet du mot "exposant", voir le Chapitre 1).

2.3 CALCULS AVEC DES MONÔMES

L'addition de monômes

On peut additionner des monômes qui sont écrits avec la même variable, au même degré. Pour cela, on additionne leurs coefficients; on garde la même variable.

Par exemple,

$$2b + 3b = 5b \qquad \text{(car } 2 + 3 = 5\text{).}$$

Voici encore trois exemples d'addition de monômes:

1) $x + x = 2x$ (car $1 + 1 = 2$)

2) $7a + 12a + a = 20a$ (car $7 + 12 + 1 = 20$)

3) $a^2 + 6a^2 + 3a^2 = 10a^2$ (car $1 + 6 + 3 = 10$).

La soustraction de monômes

On peut soustraire un monôme d'un autre, s'ils sont écrits avec la même variable, au même degré. Leur différence se calcule en calculant la différence de leurs coefficients; on garde la même variable.

Par exemple,

$$5y - 3y = 2y \qquad \text{(car } 5 - 3 = 2\text{).}$$

Voici encore trois exemples de soustraction de monômes:

1) $12x - 8x = 4x$ (car $12 - 8 = 4$)

2) $7b - b = 6b$ (car $7 - 1 = 6$)

3) $a^2 - 6a^2 = -5a^2$ (car $1 - 6 = -5$).

La multiplication de monômes

On peut multiplier un nombre et un monôme; on peut aussi multiplier deux monômes.

Le produit d'un nombre et d'un monôme. Pour multiplier un nombre et un monôme, on multiplie le coefficient du monôme par le nombre. On garde la même variable.

Par exemple,

$$2 \cdot (3y) = (2 \cdot 3) \cdot y = 6y$$

(pour le vérifier, on peut écrire: $2 \cdot (3y) = 3y + 3y = 6y)$.

Voici encore deux exemples du produit d'un nombre et d'un monôme:

$3 \cdot (12a) = 36a$ (car $3 \cdot 12 = 36$)

$5 \cdot (7x^3) = 35x^3$ (car $5 \cdot 7 = 35$) .

Le produit de monômes. Pour multiplier des monômes on multiplie leurs coefficients, et on multiplie leurs variables.

Par exemple,

$$(2a) \cdot (3a) = (2 \cdot 3) \cdot (a \cdot a) = 6a^2$$

car $2 \cdot 3 = 6$ et $a \cdot a = a^2$.

Voici trois autres exemples de multiplication de monômes:

1) $(-3a) \cdot (2a) = (-3 \cdot 2) \cdot (a \cdot a) = -6a^2$

2) $(2x^2) \cdot 7x = (2 \cdot 7) \cdot (x^2 \cdot x) = 14x^3$

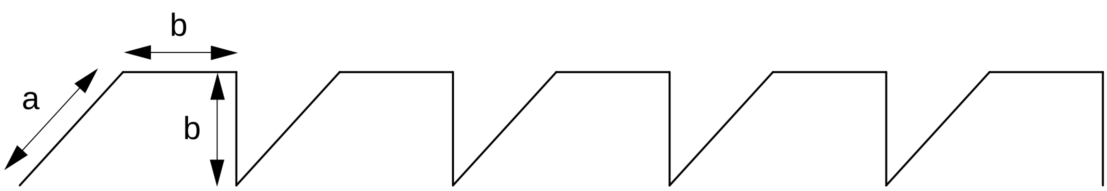
3) $5x \cdot x \cdot 2x = (5 \cdot 1 \cdot 2) \cdot (x \cdot x \cdot x) = 10x^3$

2.4 LA DISTRIBUTIVITÉ

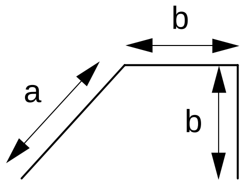
La distributivité est une propriété qui lie l'addition et la multiplication.

La distributivité peut être utilisée lorsqu'on multiplie une somme de monômes par un nombre, ou par un monôme.

Exemple Cherchons une formule qui exprime la longueur de la ligne polygonale suivante:



On peut calculer d'abord la longueur d'un des cinq éléments dont la répétition permet de constituer la ligne polygonale:



La longueur d'un tel élément est: $a + b + b = a + 2b$.

Ensuite, on multiplie la longueur d'un élément (c'est-à-dire $a + 2b$) par le nombre d'éléments (c'est-à-dire, par 5). Voici ce qu'on obtient:

$$5 \cdot (a + 2b) .$$

On peut transformer cette écriture du résultat, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (a+2b) &= (a + 2b) + (a + 2b) + (a + 2b) + (a + 2b) + (a + 2b) \\ &= (a + a + a + a + a) + (2b + 2b + 2b + 2b + 2b) \\ &= 5a + 5 \cdot (2b) \\ &= 5a + 10b . \end{aligned}$$

Donc,

$$5 \cdot (a + 2b) = 5a + 5 \cdot (2b)$$

C'est un exemple de la **règle de distributivité**:

Si A , B et C sont des nombres, ou des monômes, alors
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Lorsqu'on passe (comme dans l'exemple ci-dessus) de l'écriture

$$\underbrace{5 \cdot (a + 2b)}_{\text{produit de deux facteurs}}$$

à l'écriture

$$\underbrace{5a + 5 \cdot (2b)}_{\text{somme de deux termes}}$$

on dit qu'on **développe** le produit $5 \cdot (a + 2b)$ en utilisant la distributivité.

Voici un exemple important de l'application de cette règle:

$$\boxed{\begin{aligned} -(a + b) &= (-1) \cdot (a + b) \\ &= -a - b \end{aligned}}$$

Voici d'autres exemples de l'application de cette règle:

1) $4 \cdot (x + y) = 4 \cdot x + 4 \cdot y = 4x + 4y$

2) $(-4) \cdot (x + y) = (-4) \cdot x + (-4) \cdot y = -4x - 4y$

3) $a \cdot (a + 3) = a \cdot a + a \cdot 3 = a^2 + 3a$

4) $$\begin{aligned} 5x^3 \cdot (2x^2 + x + 3) &= 5x^3 \cdot 2x^2 + 5x^3 \cdot x + 5x^3 \cdot 3 \\ &= (5 \cdot 2) \cdot (x^3 \cdot x^2) + 5 \cdot (x^3 \cdot x) + (5 \cdot 3) \cdot x^3 \\ &= 10x^5 + 5x^4 + 15x^3 . \end{aligned}$$

2.5 LA RÉDUCTION

Lorsqu'on a une suite d'opérations, on essaie de l'écrire le plus simplement possible. Le but est de remplacer si possible la suite donnée par une autre, plus courte, qui lui soit égale. On dit alors qu'on a **réduit** la suite d'opérations.

a) Suites sans parenthèses

Dans une suite d'additions ou de soustractions sans parenthèses, on réunit d'abord les monômes qui ont la même variable au même degré. Ensuite on effectue les additions ou les soustractions des monômes qu'on a réunis.

Exemple 1 On veut réduire

$$2a + 3b + a - 5b$$

On réunit d'abord les monômes en a, et ceux en b:

$$2a + 3b + a - 5b = 2a + a + 3b - 5b$$

puis on effectue les opérations:

$$2a + a + 3b - 5b = 3a - 2b$$

La réduction que nous avons faite est donc:

$$2a + 3b + a - 5b = 3a - 2b.$$

Exemple 2 Voici un second exemple: il s'agit de réduire

$$4x^2 + 3 - 2x + 5x^2 - 4 + x .$$

On réunit d'abord les monômes en x^2, ceux en x, et les nombres, puis on effectue les opérations; on trouve

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3 - 2x + 5x^2 - 4 + x &= 4x^2 + 5x^2 - 2x + x + 3 - 4 \\ &= 9x^2 - x - 1 . \end{aligned}$$

b) Suites avec parenthèses

Dans une suite d'opérations comportant des parenthèses, on commence par appliquer la distributivité pour supprimer les parenthèses. Puis on continue comme en (a).

Exemple 1 Réduisons

$$3 \cdot (-c^2 + 2c) + 5 \cdot (3c^2 - 4c) .$$

On applique la règle de distributivité pour développer chacun des deux produits:

$$3 \cdot (-c^2 + 2c) = -3c^2 + 6c \quad \text{et} \quad 5 \cdot (3c^2 - 4c) = 15c^2 - 20c$$

Donc,

$$3 \cdot (-c^2 + 2c) + 5 \cdot (3c^2 - 4c) = -3c^2 + 6c + 15c^2 - 20c$$

et on réduit maintenant comme en (a); on trouve:

$$3 \cdot (-c^2 + 2c) + 5 \cdot (3c^2 - 4c) = 12c^2 - 14c$$

Exemple 2 Comme second exemple, réduisons

$$3x - 2y - 4 \cdot (x + y) .$$

On écrit

$$3x - 2y - 4 \cdot (x + y) = 3x - 2y + (-4) \cdot (x + y)$$

puis par distributivité,

$$\begin{aligned} 3x - 2y + (-4) \cdot (x + y) &= 3x - 2y + (-4) \cdot x + (-4) \cdot y \\ &= 3x - 2y - 4x - 4y \end{aligned}$$

La réduction est donc:

$$3x - 2y - 4 \cdot (x + y) = -x - 6y$$

Remarque L'égalité que nous venons d'obtenir,

$$3x - 2y - 4 \cdot (x + y) = -x - 6y,$$

est vraie quelles que soient les valeurs qu'on donne aux variables x et y .
On dit que c'est une **identité**.

2.6 LA MISE EN ÉVIDENCE

La mise en évidence est l'inverse de la distributivité (c'est-à-dire qu'elle "défait" ce qu'on a obtenu par application de la règle de distributivité). Elle a pour but de transformer une somme en un produit.

Voici trois exemples de mise en évidence:

1) $2x + 2y = 2 \cdot (x+y)$

2) $3a^2 + 2a = a \cdot (3a + 2)$

3) $6x^2 - 15x = 3 \cdot (2x^2 - 5x)$.

L'exemple (3) montre qu'il y a parfois plusieurs possibilités de mise en évidence: on a

$$6x^2 - 15x = 3 \cdot (2x^2 - 5x)$$

$$= 3x \cdot (2x - 5) .$$

En général, on continuera jusqu'à obtenir une mise en évidence aussi complète que possible.

2.7 VÉRIFICATIONS NUMÉRIQUES

Si, dans une identité, on remplace la variable par un nombre, on obtient une égalité entre nombres. On peut appliquer ce principe pour détecter certaines erreurs dans des calculs littéraux.

Si on remplace la variable par un nombre dans un calcul littéral, et si l'égalité qu'on obtient ainsi n'est pas vérifiée, c'est qu'on s'est trompé.

Par exemple, supposons qu'en faisant une mise en évidence, on ait trouvé le résultat:

$$7x^2 + 22x = 7x \cdot (x + 3)$$

Faisons une vérification, en remplaçant x par 1. On obtient

$$7 + 22 = 7 \cdot (1 + 3)$$

c'est-à-dire

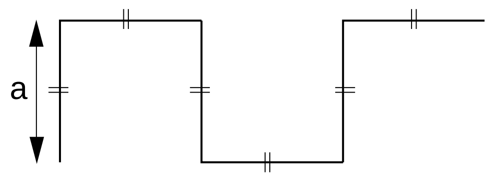
$$29 = 28,$$

ce qui est faux. Cela nous indique que la mise en évidence était fausse.
Comment faut-il la corriger?

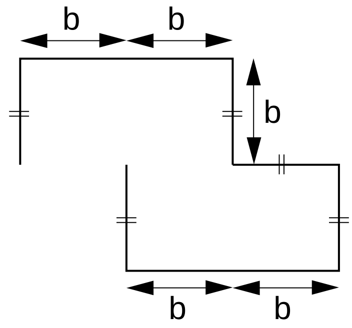
EXERCICES ORAUX ET ÉCRITS

452 Exprimer la longueur de chacune des lignes suivantes par une formule :

1)

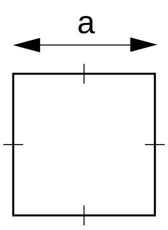


2)

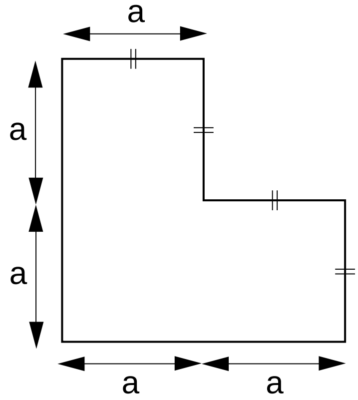


453 Exprimer le périmètre de chacune des figures suivantes par une formule :

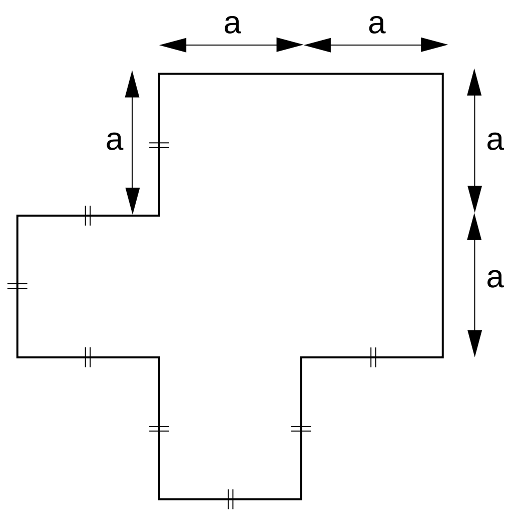
1)



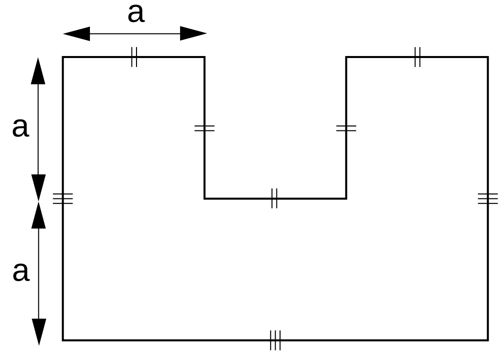
2)



3)

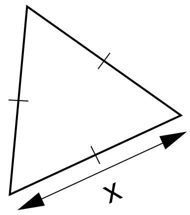


4)

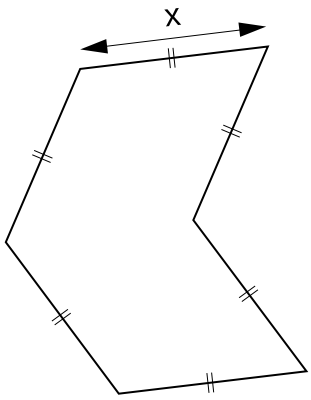


454 Exprimer le périmètre de chacune des figures suivantes par une formule :

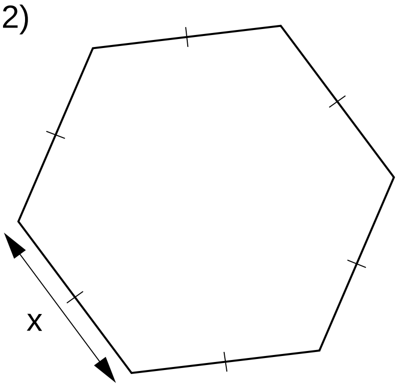
1)



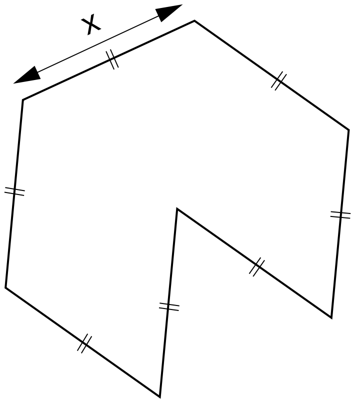
3)



2)

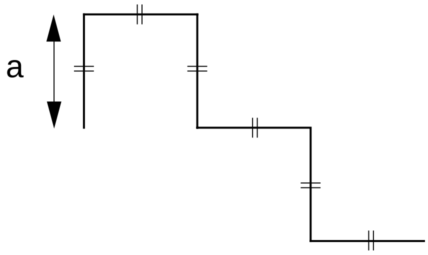


4)

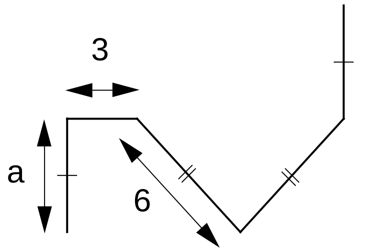


455 Exprimer la longueur de chacune des lignes polygonales suivantes par une formule:

1)



2)



456 Réduire les expressions suivantes :

1) $a + a + a$
2) $b + b + b + b$
3) $x + x$
4) $y + y + y + y + y$
5) $a + a + a + a$
6) $x + x + x + x + x + x + x$

457 Réduire les expressions suivantes :

1) $7b + 4b$
2) $x + 6x$
3) $5a + 2a$
4) $8x + 15x$
5) $7y + 9y$
6) $43a + 15a$

458 Réduire les expressions suivantes :

1) $4x + 3x + 5x$
2) $2a + a + 4a$
3) $15b + 34b$
4) $8a + 3a + 12a$
5) $4x + 3x + 6x$
6) $16a + 19a + 4a$

459 Réduire les expressions suivantes :

1) $4x + 15x + 7x$
2) $8a + 29a + a$
3) $16y + 5y + 14y$
4) $x + 41x + 9x$
5) $12b + 7b + 18b + 3b$
6) $5a + 3a + 17a$

460 Réduire les expressions suivantes :

1) $a + a – a$
2) $b – b$
3) $x + x + x – x + x – x$
4) $a – a – a$
5) $–x – x – x$
6) $–b + b – b – b + b$

461 Réduire les expressions suivantes :

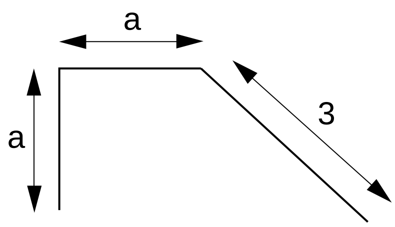
1) $4x – 2x$
2) $12x – 7x$
3) $3a – 5a$
4) $8x – 8x$
5) $–2b + 5b$
6) $–7x + 3x$
7) $15x – 7x$
8) $–2a – a$
9) $–7b + 9b$
10) $–x – 4x$
11) $7y – 19y$
12) $–3a + 3a$

462 Réduire les expressions suivantes :

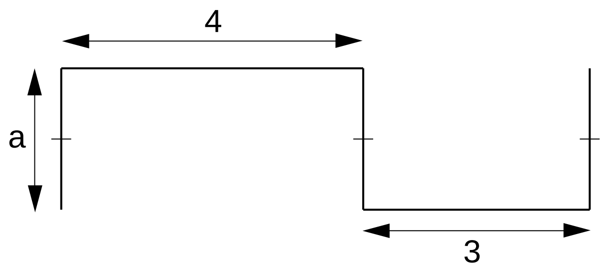
1) $8a – 6a + 3a$
2) $15x – 9x – 8x + x$
3) $3y – 8y – 5y + 2y$
4) $–15a + 3a + 5a – 3a$
5) $6x – 14x + 3x – 7x$
6) $2a + a – 9a – a + 3a$

463 Exprimer par une formule la longueur de chacune des lignes suivantes :

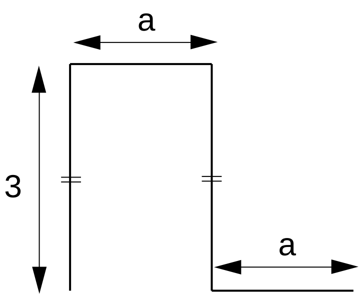
1)



3)

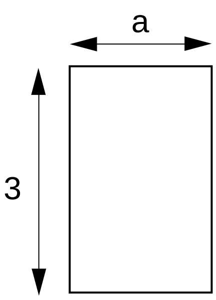


2)

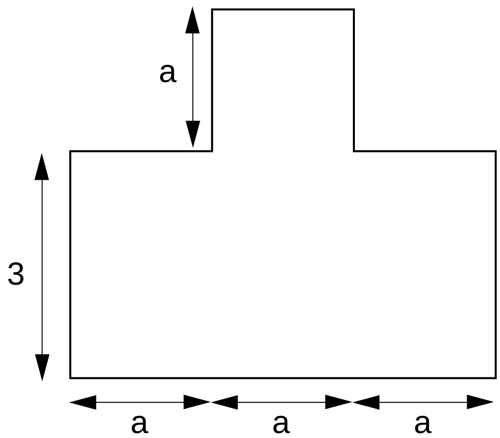


464 Exprimer le périmètre de chacune des figures suivantes par une formule :

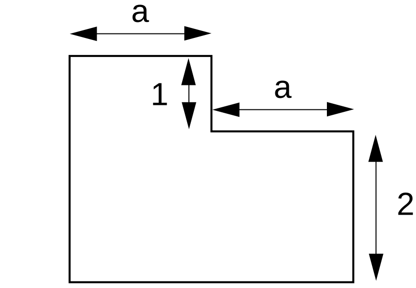
1)



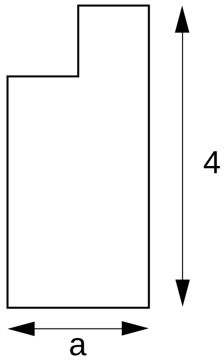
3)



2)



4)



465 Réduire les expressions suivantes :

1) $a + a + 4$
2) $5 + x + x + 7$
3) $b + 7 + b + 3 + b$
4) $x + x + 6 + x + 3$
5) $a + 8 + a$
6) $9 + y + 13 + y + y$

466 Réduire les expressions suivantes :

1) $2a + 6 + 3a$
2) $b + 8 + 17 + 6b$
3) $4x + 3x + 9 + 2 + x$
4) $5y + 12 + 5y + 1$
5) $2b + 4 + 7b + 8$
6) $17x + 43 + 8x + 7$

467 Réduire les expressions suivantes :

1) $4x + 3x + 7 + 2x + 12$
2) $14 + 3a + 12 + a + 6a$
3) $2b + 24 + 5b + 16$
4) $9a + 8 + 3a + 15 + a$
5) $17 + 4a + 19 + 8a + 13$
6) $8y + 18 + 7y + 21 + 4y + 28$

468 Réduire les expressions suivantes :

1) $4a - 3 + a$
2) $5b + 7 - 2b$
3) $-3x + x - 4$
4) $8b - 9 + 3b$
5) $-a + 12 - 3a + 4$
6) $7x - 19 - 13x + 24$

469 Réduire les expressions suivantes :

1) $5x - 12x + 4 - 7 + 15x$
2) $-6 + 3a - 4 - 5a + 21$
3) $3x - 4 + 7x - 9$
4) $12 - 4x + 7x - 18$
5) $-9 + 41a + 32 - 17a$
6) $y - 6 + y - 3 + y - 14$

470 Réduire les expressions suivantes :

1) $-2x + 4 - 3x + 5 + x$
2) $15 + 7a - 18 - a - a + 4$
3) $2y - 6 - 5y + 3y + 2 + 4$
4) $15x + 68 - 17x - 39 - 11$
5) $-5a - 13a + 41 - 19a + 29$
6) $b - 8 + 3b - 4 - 5b + 12$

471 Réduire les expressions suivantes :

1) $(4x - 8) + (15 - 7x)$
2) $(3 + 2a) + (5a - 9)$
3) $(-3x + 8) + (-15 - x)$
4) $(7y - 12) + (12 - 7y)$
5) $(24a - 31) + (-36a + 17)$
6) $(-2a - 4) + (a - 5)$

472 Réduire les expressions suivantes :

1) $(x + 7) + (3 - 4x) + (2x - 9)$
2) $(-3y + 6) + (y - 4) + (12 + 2y)$
3) $(6x + 8) + (-3x + 9) + (x - 15)$
4) $(-5 + y) + (4y - 5) + (13 - 3y)$
5) $(9a + 13) + (18 - 15a) + (1 - a)$
6) $(16 - 4x) + (8x + 3) + (-19 - 4x)$

473 Réduire les expressions suivantes :

1) $(15a + 3) + (-2a + 8) + (a - 17)$
2) $(8x - 4) + (4 - 8x) + (2 + 3x)$
3) $(2y + 18) + (-29 - 7y) + (y - 1)$
4) $(6x - 7) + (8 - 7x) + (9x - 8)$
5) $(12 + 15x) + (13x - 20) + (14 + 6x)$
6) $(27a - 52) + (-21a - 16) + (43 - 12a)$

474 Réduire les expressions suivantes :

1) $(a + 3) + (a + 5)$
2) $(4 + x) + (x + 19)$
3) $(b + 9) + (b + 3) + (b + 7)$
4) $(2b + 4) + (5 + b)$
5) $(6x + 3) + (4x + 9)$
6) $(15 + 2a) + (1 + 3a)$

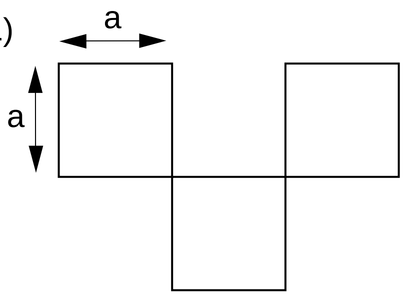
475 Réduire les expressions suivantes :

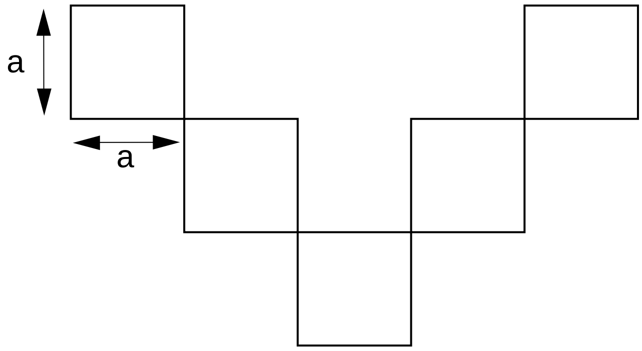
1) $(2x + 4) + (5x - 6)$
2) $(8 + y) + (y - 8)$
3) $(4a - 11) + (2a - 6)$
4) $(7 - x) + (x + 3)$
5) $(13a - 45) + (12 - 4a)$
6) $(-8x + 3) + (11x - 9)$

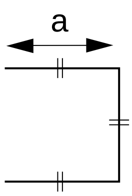
476 Réduire les expressions suivantes :

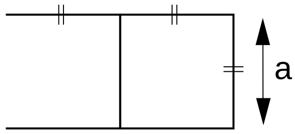
1) $(5x + 4) + (5 - 7x)$
2) $(7x + 3) + (-12x + 6)$
3) $(2a - 4) + (8 - 3a)$
4) $(6y + 9) + (9 - 6y)$
5) $(3c - 14) + (14 - 3c)$
6) $(-2x + 3) + (x - 5)$

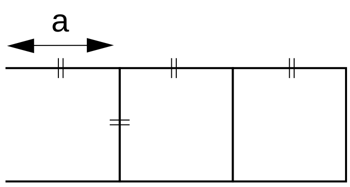
477 Exprimer par une formule la longueur de chacune des lignes suivantes :

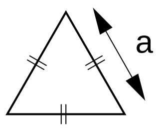
1)


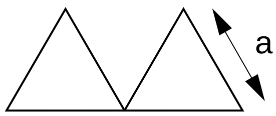
2)


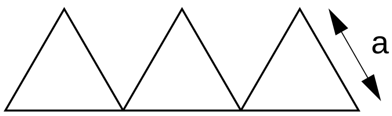
3)


4)


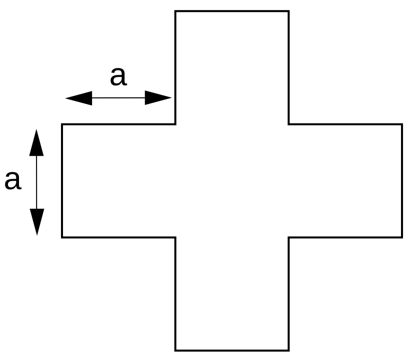
5)


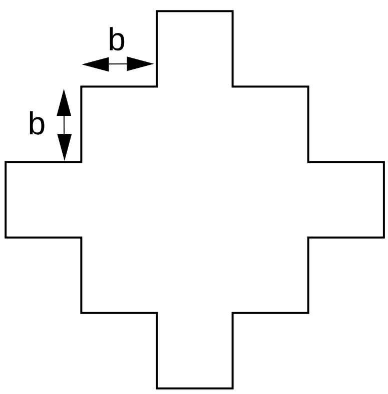
6)


7)


8)


478 Exprimer le périmètre de chacune des figures suivantes par une formule :

1)


2)


479 Calculer les produits suivants :

1) $2 \cdot (3a)$
2) $5 \cdot (4x)$
3) $3 \cdot (7y)$
4) $6 \cdot (5a)$
5) $4 \cdot (2b)$
6) $8 \cdot (3x)$
7) $9 \cdot (5a)$
8) $2 \cdot (7b)$
9) $4 \cdot (13x)$
10) $6 \cdot (8a)$

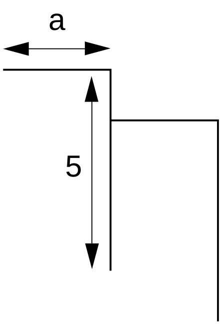
480 Calculer les produits suivants :

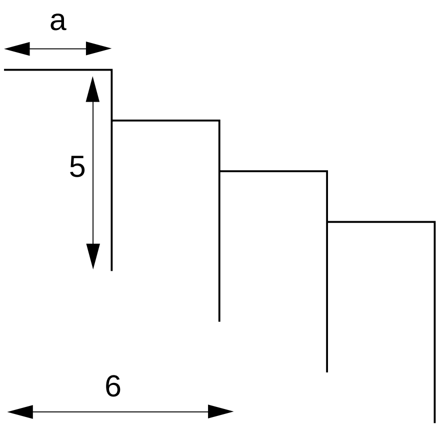
1) $10 \cdot (4b)$
2) $4 \cdot (9x)$
3) $3 \cdot (5a)$
4) $11 \cdot (6y)$
5) $9 \cdot (8b)$
6) $7 \cdot (6x)$
7) $5 \cdot (7a)$
8) $7 \cdot (9b)$
9) $4 \cdot (6x)$
10) $8 \cdot (7d)$

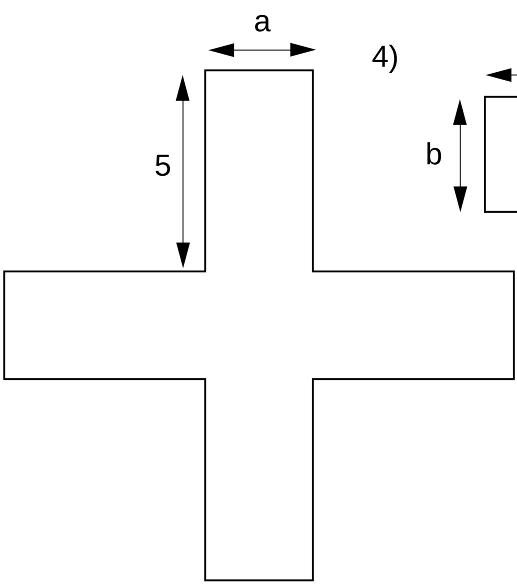
481 Calculer les produits suivants :

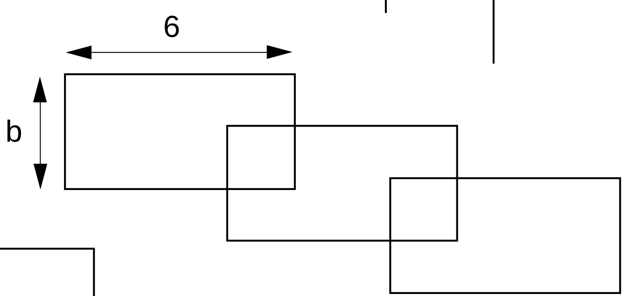
1) $(12x) \cdot 7$
2) $4 \cdot (11y)$
3) $9 \cdot (13b)$
4) $(12a) \cdot 5$
5) $(11y) \cdot 11$
6) $9 \cdot (11a)$
7) $7 \cdot (7b)$
8) $(5d) \cdot 6$
9) $12 \cdot (11x)$
10) $(6x) \cdot 13$

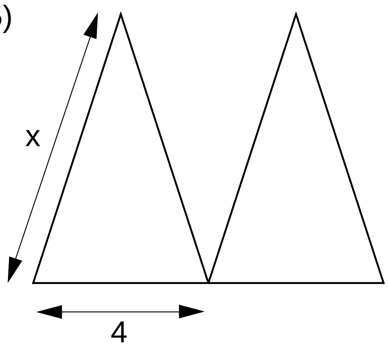
482 Exprimer par une formule la longueur de chacune des lignes suivantes :

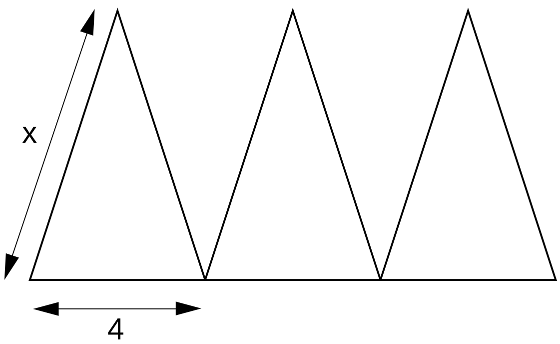
1)


2)


3)


4)


5)


6)


483 Développer chacun de ces produits en utilisant la distributivité :

1) $2 \cdot (x + 3)$
2) $4 \cdot (x + 6)$
3) $3 \cdot (2a + 4)$
4) $5 \cdot (3x + 7)$
5) $8 \cdot (2b + 1)$
6) $8 \cdot (4 + x)$
7) $4 \cdot (y + 3)$
8) $3 \cdot (2x + 5)$
9) $5 \cdot (6 + 3a)$
10) $7 \cdot (a + 8)$

484 Développer chacun de ces produits en utilisant la distributivité :

1) $6 \cdot (4 + 3x)$
2) $7 \cdot (2y + 9)$
3) $9 \cdot (11 + 4a)$
4) $12 \cdot (2b + 3)$
5) $4 \cdot (5 + x)$
6) $12 \cdot (2y + 9)$
7) $5 \cdot (12 + 7b)$
8) $9 \cdot (6a + 12)$
9) $10 \cdot (5x + 16)$
10) $2 \cdot (8 + 3a)$

485 Développer chacun de ces produits en utilisant la distributivité :

1) $5 \cdot (2x + 8)$
2) $11 \cdot (4 + 3a)$
3) $7 \cdot (15b + 9)$
4) $15 \cdot (6y + 2)$
5) $20 \cdot (x + 7)$
6) $7 \cdot (3a + 8)$
7) $6 \cdot (7 + 6x)$
8) $8 \cdot (12b + 4)$
9) $13 \cdot (15 + 8y)$
10) $4 \cdot (5x + 14)$

LES ÉQUATIONS

THÉORIE

1. LES ÉQUATIONS

Il est souvent utile d'employer le calcul littéral pour chercher la solution d'un problème comme le suivant:

Problème 1 Nora et Adrien ont ensemble 69 billes.
Nora en a 7 de plus qu'Adrien.
Combien en ont-ils chacun?

Solution Appelons x le nombre de billes qu'a Adrien.

Nora a alors $x + 7$ billes.

Ensemble ils ont 69 billes, donc $x + (x + 7) = 69$.

Cette égalité n'est vérifiée que pour une seule valeur de x.

Cette valeur est 31, car si nous remplaçons x par 31 dans $x + (x + 7)$ nous obtenons bien

$$\begin{aligned} x + (x + 7) &= 31 + (31 + 7) \\ &= 31 + 38 \\ &= 69\,. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé la solution du problème: Adrien a 31 billes et Nora en a 38.

Nous avons appris en 7e qu'une égalité comme $x + (x + 7) = 69$ s'appelle une **équation**.

La lettre x employée dans cette équation s'appelle **l'inconnue** de l'équation.

Résoudre une équation comme $x + (x + 7) = 69$, c'est chercher le nombre par lequel il faut remplacer x dans l'équation pour que l'égalité soit vérifiée. Ce nombre s'appelle **la solution** de l'équation.

La solution de l'équation $x + (x + 7) = 69$ est 31. On écrit: $x = 31$.

Une équation comme $x + (x + 7) = 69$ comporte un **membre de gauche** et un **membre de droite**, séparés par un signe d'égalité:

$$\underbrace{x + (x + 7)}_{\text{membre de gauche}} \quad \underset{\text{signe d'égalité}}{=} \quad \underbrace{69}_{\text{membre de droite}}$$

Pour résoudre une équation comme $x + (x + 7) = 69$, nous appliquerons les deux propriétés suivantes de l'égalité:

> 1. Une égalité reste vraie si on ajoute (ou si on soustrait) le même nombre à chaque membre.

Exemple $1 + 6 = 3 + 4$

et

$$(1 + 6) + 2 = (3 + 4) + 2$$

> 2. Une égalité reste vraie si on multiplie (ou si on divise) chaque membre par le même nombre (différent de 0).

Exemple $1 + 6 = 3 + 4$

et

$$(1 + 6) \cdot 5 = (3 + 4) \cdot 5$$

Nous allons appliquer ces propriétés pour résoudre l'équation

$$x + (x + 7) = 69 .$$

Résolution

EXPLICATIONS	CALCULS
l'équation à résoudre est	$x + (x + 7) = 69$
on réduit la suite d'opérations dans le membre de gauche	$2x + 7 = 69$
on soustrait 7 de chaque membre, pour n'avoir que l'inconnue x dans le membre de gauche	$(2x + 7) - 7 = 69 - 7$
on effectue les opérations	$2x = 62$
on divise chaque membre de l'équation par 2, qui est le coefficient de l'inconnue x	$x = 31$
31 est la solution de l'équation $x + (x + 7) = 69$	

Vérification

Pour vérifier nos calculs, nous remplaçons x par 31 dans le membre de gauche de l'équation $x + (x + 7) = 69$, comme nous l'avons déjà fait à la page précédente.

2. QUELQUES EXEMPLES

Voici d'autres exemples qui illustrent cette méthode.

Problème 2 Si on ajoute 12 à un nombre, on obtient 35.
Quel est ce nombre?

Mise en équation Désignons le nombre qu'on cherche par x.
L'énoncé du problème nous dit alors que

$$x + 12 = 35 .$$

Résolution

l'équation à résoudre est	$x + 12 = 35$
on soustrait 12 de chaque membre	$(x+ 12) - 12 = 35 - 12$
on effectue les opérations	$x = 23$
23 est la solution de l'équation x + 12 = 35	

Réponse au problème: le nombre cherché est 23 .

Vérification

Si on ajoute 12 à 23, on obtient 35, comme le problème l'exige:

$$\begin{aligned} x + 12 &= 23 + 12 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Problème 3 L'aire d'un triangle mesure 21 cm^2. Sa base mesure 7 cm. Combien mesure la hauteur qui correspond à cette base ?

Rappel: l'aire d'un triangle se calcule avec la formule:

$$\frac{b \cdot h}{2} = A$$

où A désigne l'aire, b désigne la base et h désigne la hauteur correspondante.

Mise en équation On va désigner par x la mesure de la hauteur cherchée. On exprimera cette mesure en centimètres.

On a alors, en employant la formule qu'on vient de rappeler:

$$\frac{7 \cdot x}{2} = 21$$

et c'est cette équation qu'il faut résoudre.

Résolution

l'équation à résoudre est	$\frac{7 \cdot x}{2} = 21$
on multiplie les deux membres par 2	$7x = 42$
on divise chaque membre par 7	$x = 6$
la solution de l'équation est 6	

Réponse au problème: la hauteur cherchée mesure 6 cm.

Vérification

Si la base d'un triangle mesure 7 cm, et si la hauteur qui correspond à cette base mesure 6 cm, alors l'aire de ce triangle est

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = 7 \cdot 3 = 21 \text{ cm}^2$$

Variante L'équation $\frac{7 \cdot x}{2} = 21$ peut aussi s'écrire:

$$\frac{7}{2} \cdot x = 21$$

On divise alors chaque membre par $\frac{7}{2}$. On obtient $x = 21 : \frac{7}{2} = 6$.

Problème 4 Trouver un nombre dont le quadruple diminué de 7 est 11.

Mise en équation On utilisera la lettre x pour représenter le nombre qu'on cherche. L'énoncé du problème nous dit alors que

$$4x - 7 = 11$$

C'est cette équation qu'il faut résoudre pour trouver le nombre cherché.

Résolution

l'équation à résoudre est	$4x - 7 = 11$
on additionne 7 à chaque membre	$(4x - 7) + 7 = 11 + 7$
on effectue les opérations	$4x = 18$
on divise chaque membre par 4	$x = \frac{18}{4}$
on simplifie la fraction	$x = \frac{9}{2}$
la solution de l'équation est $\frac{9}{2}$	

Réponse au problème: le nombre cherché est $\frac{9}{2}$.

Vérification

Si on calcule le quadruple de $\frac{9}{2}$, diminué de 7, on trouve

$$4 \cdot \frac{9}{2} - 7 = 18 - 7 = 11 ,$$

comme le problème l'exige.

EXERCICES ORAUX

Résoudre oralement les équations suivantes (exercices 486 à 493) :

486
1) $x + 4 = 7$
2) $3 + x = 9$
3) $x + 8 = 12$
4) $x + 3 = 4$
5) $6 + x = 15$
6) $2 + x = 9$

487
1) $x + 9 = 14$
2) $x + 8 = 23$
3) $5 + x = 17$
4) $x + 18 = 23$
5) $16 + x = 30$
6) $21 + x = 29$

488
1) $x + 14 = 21$
2) $8 + x = 32$
3) $17 + x = 40$
4) $28 + x = 71$
5) $x + 16 = 54$
6) $13 + x = 14$

489
1) $x + 3 = 19$
2) $16 + x = 24$
3) $31 + x = 47$
4) $x + 18 = 74$
5) $9 + x = 13$
6) $x + 16 = 22$

490
1) $3 \cdot x = 12$
2) $5 \cdot x = 15$
3) $7 \cdot x = 77$
4) $2 \cdot x = 12$
5) $4 \cdot x = 28$
6) $9 \cdot x = 18$
7) $5 \cdot x = 50$
8) $3 \cdot x = 39$

491
1) $8x = 8$
2) $7x = 35$
3) $2x = 18$
4) $6x = 48$
5) $2x = 30$
6) $5x = 95$
7) $3x = 48$
8) $5x = 100$

492
1) $12x = 36$
2) $4x = 68$
3) $13x = 26$
4) $5x = 115$
5) $6x = 42$
6) $14x = 70$
7) $9x = 81$
8) $6x = 66$

493
1) $7x = 91$
2) $3x = 60$
3) $5x = 55$
4) $4x = 140$
5) $15x = 90$
6) $32x = 0$
7) $18x = 36$
8) $12x = 72$

494 Soit x un nombre. Comment peut-on écrire … ?

1) le double de ce nombre
2) le triple de ce nombre
3) la moitié de ce nombre
4) le quart de ce nombre
5) ce nombre augmenté de 3
6) ce nombre augmenté de 8

495 Soit y un nombre. Comment peut-on écrire … ?

1) ce nombre augmenté de 7
2) le tiers de ce nombre
3) ce nombre augmenté de lui-même
4) ce nombre augmenté de son double
5) ce nombre augmenté de sa moitié

496 La largeur d'un rectangle est x. Sa longueur mesure trois fois sa largeur.

Comment peut-on écrire sa longueur ?
Comment peut-on écrire son périmètre ?

EXERCICES ÉCRITS

Résoudre par écrit les équations suivantes (exercices 497 à 500):

497
1) $x + 165 = 394$
2) $48 + x = 176$
3) $x + 67 = 91$
4) $x + 325 = 672$
5) $166 + x = 391$
6) $89 + x = 104$

498
1) $x + 3{,}4 = 7{,}5$
2) $6{,}2 + x = 9{,}5$
3) $x + 17{,}50 = 23$
4) $3{,}85 + x = 7{,}60$
5) $8{,}40 + x = 11{,}25$
6) $x + 5{,}90 = 17{,}35$

499
1) $6x = 288$
2) $4x = 368$
3) $14x = 728$
4) $13x = 793$
5) $7x = 196$
6) $83x = 4316$

500
1) $5x = 10{,}50$
2) $7x = 22{,}05$
3) $8x = 50{,}40$
4) $2{,}6x = 20{,}80$
5) $8{,}5x = 102$
6) $3{,}4x = 54{,}40$

501 Pierre avait 16,50 fr. Après plusieurs dépenses, il lui reste

1) 4,75 fr. 2) 2,30 fr. 3) 12,05 fr. 4) 7,95 fr.

À combien s'élevaient dans chaque cas ses dépenses ?

502 Paul a dépensé 12,45 fr. Il remarque qu'il lui reste encore

1) 7,75 fr. 2) 15,40 fr. 3) 21 fr. 4) 17,95 fr.

Combien d'argent avait-il avant ses dépenses ?

503 Jean-Pierre a 15,35 fr. de plus que Béatrice; Béatrice a 21,40 fr.

1) Combien d’argent a Jean-Pierre ?
2) Combien d’argent ont-ils ensemble ?

504 Le périmètre d'un rectangle est de 108 m.
Calculer sa largeur, si sa longueur mesure

1) 35 m 2) 41 m 3) 50,2 m 4) 48,35 m

505 L'aire d'un rectangle est de 112,32 cm^2.
Calculer sa longueur, si sa largeur mesure

1) 6 cm 2) 4 cm 3) 7,2 cm 4) 3,9 cm

506 L'aire d'un parallélogramme est de 602 m^2.
Calculer sa hauteur, si sa base mesure

1) 21,5 m 2) 70 m 3) 4,3 m 4) 15,05 m

507 L'aire d'un triangle est de 50,4 cm^2.
Calculer sa base, si sa hauteur mesure

1) 18 cm 2) 11,2 cm 3) 4,5 cm 4) 12,6 cm

508 L'aire d'un losange est de 113,4 m^2.
Calculer la longueur d'une diagonale, si l'autre diagonale mesure

1) 10,5 m 2) 13,5 m 3) 8,1 m 4) 14 m

509 Partager 78 fr. entre deux personnes de telle sorte que la première reçoive 42 fr. de plus que la seconde.

510 Jean et Paul ont ensemble 50 billes. Paul en a 12 de plus que Jean.
Combien chacun a-t-il de billes ?

511 Marc et Stéphanie ont ensemble 27 fr. Stéphanie a 5,50 fr. de plus que Marc.
Combien chacun a-t-il d'argent ?

512 Résoudre ces équations :

1) $x - 16 = 40$
2) $13 + x = -2$
3) $x - 4 = 12$
4) $x + 12{,}5 = 4{,}3$
5) $x - 7{,}3 = 9{,}8$
6) $7 + x = -4{,}5$

513 Résoudre ces équations :

1) $x + 83 = 73$
2) $5 - x = 3$
3) $\frac{x}{2} = 15$
4) $7x = -\frac{14}{3}$
5) $8 - x = 4$
6) $15 - x = -2$

EXERCICES DE DÉVELOPPEMENT

514 Résoudre les équations suivantes :

1) $2x + 3 = 11$	5) $2x - 9 = 11$	9) $3x + 64 = 70$
2) $3x + 1 = 22$	6) $2x - 5 = 25$	10) $9x - 7 = 38$
3) $2x - 4 = 14$	7) $2x + 5 = 26$	11) $7x + 2 = 23$
4) $3x - 1 = 23$	8) $8x - 13 = 139$	12) $3x - 21 = 9$

515 La longueur d'un rectangle est égale au quintuple de sa largeur. Son périmètre est de 180 cm. Calculer ses dimensions.

516 Partager 104 fr. entre trois personnes de telle sorte que la deuxième reçoive le double de la première et que la troisième reçoive 20 fr. de moins que la première.

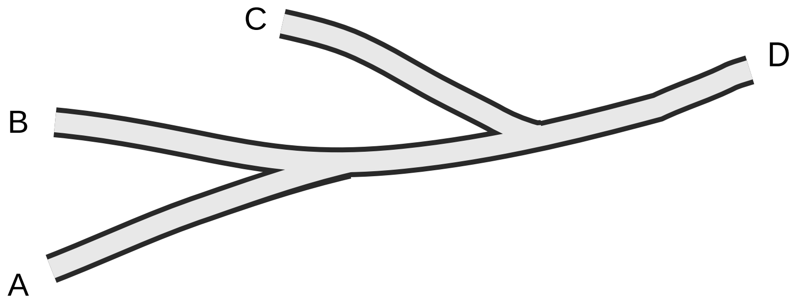
517 Lors d'une vente de pâtisseries organisée par la classe, Pierre a encaissé 4 fr. de plus que Daniel. Ils ont vendu ensemble pour 28 fr. de gâteaux à 0,80 fr. pièce.
Combien de gâteaux chacun a-t-il vendus ?

518 Pierre, Bernard et Béatrice ont ensemble 20 disques. Bernard a deux fois autant de disques que Pierre. Béatrice en a 5 de plus que Bernard.
Combien chacun a-t-il de disques ?

519 Des livres mesurent 3 cm d'épaisseur. Ils sont rangés en trois piles.
La deuxième pile a trois fois la hauteur de la première.
La troisième pile mesure 12 cm de moins que la deuxième.
Il y a en tout 17 livres.
Combien y a-t-il de livres dans chaque pile ?

520 Partager 77 fr. entre trois personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 15 fr. de plus que la première et que la troisième reçoive le double de ce que reçoit la deuxième.

521 Trois rivières A, B et C se rejoignent pour former le fleuve D.



Il coule deux fois plus d'eau dans la rivière B que dans la rivière A.

Le débit de la rivière C dépasse de 60 m^3 par seconde le débit de la rivière B.

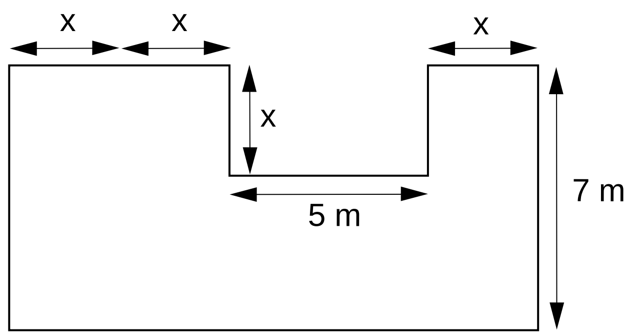
On mesure un débit de 1135 m^3 par seconde sur le fleuve D.

Trouver le débit de chaque rivière, en m^3 par seconde.

522 Lors d'une élection, le candidat le mieux placé a obtenu 1300 voix de plus que le deuxième, et le deuxième a obtenu trois fois le nombre de voix du troisième.
Il y a eu 6900 votants.
Trouver le nombre de voix obtenues par chaque candidat et déterminer si le premier candidat a atteint la majorité absolue (la moitié des voix plus une).

523 Une barrière rectiligne est formée d'un treillis soutenu par des piquets plantés tous les 2 m. Il y a 8 piquets, qui ont coûté 4 fr. pièce.
La barrière a coûté en tout 74 fr. (piquets plus treillis).
Quel est le prix d'un mètre de treillis ?

524



Quel doit être x pour que

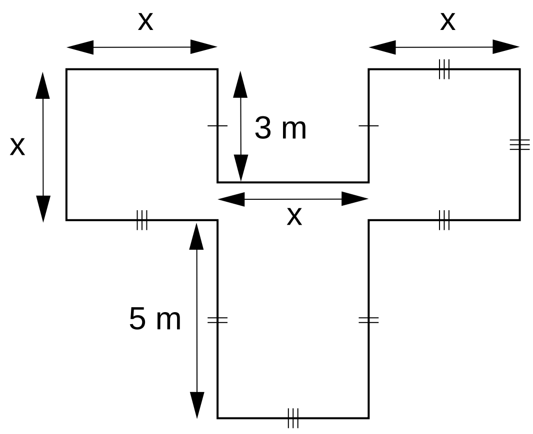
a) le périmètre de cette figure soit de … ?

1) 64 m 2) 224 m 3) 100 m 4) 391 m

b) l'aire de cette figure soit de … ?

1) 51 m^2 2) 163 m^2 3) 200 m^2 4) 391 m^2

525



Quel doit être x pour que le périmètre de cette figure soit de … ?

1) 40 m 2) 432 m 3) 100 m 4) 391 m